P. 1103. B. 14

MEMORIE

DELL'

ISTITUTO NAZIONALE ITALIANO

CLASSE

DI FISICA E MATEMATICA

Tomo secondo. Parte prima

BOLOGNA. 1808

PRESSO I FRATELLI MASI E COMPAGNO

TIPOGRAFI DELL' ISTITUTO

PREFAZIONE

Nel comparire al cospetto del Pubblico questo secondo tomo di fisica e matematica dell' Istituto nazionale italiano, dovrebb' esso per lo suo meglio imitar la modestia e verecondia del primo che fu contento di rivolgersi ai lettori con un semplice avviso destinato ad informargli di alquante cose che gli premeva ch' essi sapessero. In vece confida esso che gli verrà conceduto di recare in fronte un discorso col titolo alquanto ambizioso di prefazione. Non vorranno di questo coraggio nè stupire nè rimproverarlo quelle savie e discrete e intelligenti persone, delle quali è noto a chi per proprio obbligo raccoglie per la stampa le produzioni de' suoi Colleghi, che avendo avuta la compiacenza di arrestarsi a leggere i pochi scritti da lui posti alla testa del primo volume, non ne furono in tutto scontente. D' altra parte durano tuttavia le circostanze, in cui due anni addietro trovavasi il Corpo accademico, e con esse sussistono gl' inciampi e le angustie narrate e deplorate nell' avviso mentovato, che cospirando nel raccoglitore colla ristrettezza delle sue forze gli vietarono di assumere il carattere di storico. Si teme pure che mancar gli possa il soccorso di qualche estratto per cui giovan-

dosi e rafforzandosi dell' ajuto di alcuno de' suoi degni Socii porre sull' ingresso del volume un vestibolo conforme all' indole dell' opera e più degno di essa. Nè in questa penuria di mezzi non pretende già egli di supplire all' uopo. Solo, giacchè forse non è in tutto nè anche decente il lasciare il libro senza qualche proemio, ci si augura che la prestanza degli oggetti sopra de' quali ha divisato d' intertenersi renda meno sensibili i difetti della esecuzione.

E a fin di entrare senza più nell' argomento, e additarne la meta, l' estensione, i confini, fingasi che il gran Bacone metta il capo fuori della tomba, e rivedendo la luce, come gli detterebbe senza dubbio lo zelo accesissimo in lui pure risorto pe' progressi dell' umano sapere, salga di nuovo su quella eccelsa vedetta, dond' egli, ha omai due secoli, abbracciò l' intero campo delle scienze, qual gli si offriva a' suoi dì, e fu da lui delineato nelle immortali sue opere. Nel rivederlo al presente, di qual giubilo non rimarrebbe egli compreso allo scoprire in esso i luoghi e tratti a' suoi tempi sì angusti, sterili, deserti quasi delle naturali scienze, cresciuti ora a dismisura, floridi, ubertosi, coperti per ogni dove di prodi coltivatori? Oh mie ben impiegate fatiche, esclamerebbe egli congratulandosi con se medesimo! oh sudori miei bene sparsi che nell' aspetto ridente in cui riveggo le scienze a me predilette, ottengono sì largo compenso! Per altro è assai naturale ch' ei nell' ap-

plaudire agli sforzi de' Fisici, si crederebbe tenuto d'indirizzar loro qualche consiglio. Chi meglio di lui ne avrebbe il diritto? Chi sa che lungi di ammonir gli uomini, come già tempo, a magnificar meno le loro ricchezze, e a diffidar pur meno delle proprie forze non vedesse il bisogno di avvertirgli a pensare alquanto meno altamente delle une e delle altre? In questi tempi ci ravviserebbe forse una cotal disposizione comune, se vuolsi, ad ogni secolo, ma in essi eccessiva' a lusingare e adulare se stessi. Di questa malattìa propria della nostra specie, per cui ogni età pretende di avvantaggiarsi sulle passate, egli negli uomini che ci vivono al presente, scoprirebbe indizj e sintomi chè la dichiarano cresciuta oltre modo, e forse a grande stento si asterrebbe dal rimproverarnegli. Probabilmente qualche sorpresa in lui risveglierebbe il vedere che di opinioni pochi lustri o più veramente pochi anni addietro comunemente adottate si sparla adesso come di rancidumi e anticaglie. Ei non penerebbe ad accorgersi che a questi dì è soverchio quasi il confortar gli uomini a sentire meno bassamente di se, e che converrebbe piuttosto inspirar loro qualche sospetto che negli encomii di cui son liberali verso la nostra età, essi per avventura trascorrono qualche volta nelle esagerazioni e negli eccessi. Benchè, ei non avvolgerebbe senza dubbio nelle ammonizioni quella eletta schiera di Fisici eccellenti de' nostri tempi che accoppiando al raro valore la dovuta circospezione ten-

gono in freno l' immaginazione nè le permettono di contaminare de' suoi fantasmi il rigore de' loro ragionamenti. Dell' esempio autorevole di questi egli anzi gioverebbesi a mostrare agli altri il retto sentiero; e sarebbe largo di applausi verso quell' insigne Fisico ginevrino che avendo quanto niun altro, diritto di riposare omai sulle proprie palme, non cessa di combattere a guisa di Mantenitore del retto e sano e solido filosofare; nè contento degli esempii preclari offertici da' suoi lavori ha creduto di dover porre argine ai traviamenti altrui coll' analisi di fresco da lui pubblicata delle opere del gran Britanno, e col farne di nuovo risuonare i precetti alle orecchie di molti che se ne mostran dimentichi.

Ma per non abbandonar così subito l' introdotta finzione, qual idea direm noi, che il gran Bacone nel contemplar lo spettacolo sopra modo per lui commovente delle naturali scienze a' suoi dì sì povere e nude, si formerebbe di quelli ne' quali l' entusiasmo verso i vanti e le glorie di questo secolo giugne a tale, chi ponga mente al loro linguaggio, che per poco non si mostran persuasi che l' ingegno umano abbia a questi ultimi tempi acquistato un vigor nuovo onde salire rapidamente di conquista in conquista, e di trionfo in trionfo, nè sia guari lontana l' epoca, in cui verrà posto il comignolo all' edificio? Egli probabilmente senza aprir l'animo a speranze cotanto magnifiche si asterrebbe non per-

tanto dal biasimarnegli. Conoscitore profondo qual era degli uomini, gli sarebbe presente che a scuoterne efficacemente l' industria, giova per solito qualche illusione; che la persuasion di potere aggiugne spesso al coraggio la costanza e il vigore; e che di essi non di rado si avvera il detto del poeta, che possunt quia posse videntur.

Esso piuttosto con sopracciglio alquanto severo rivolgerebbesi ai Fisici, e chiederebbe loro come e per quale o condiscendenza loro, o pusillanimità sia avvenuto che rinunziino alla maggiore e miglior parte de' loro diritti e si dichiarin contenti di versar quind'innanzi sulle qualità de' corpi più aperte all' esame, ritirandosi nelle provincie men nobili, e cedendo altrui le più ricche e ubertose? Come! La Fisica non è più dunque la scienza che per proprio scopo si occupa della interpretazione d' ogni maniera di naturali fenomeni? Non ha dubbio che non convenga ritenere questo sopra ogni altro legittimo concetto della medesima. Certo che al fisico secondo la varietà de' rami dello studio della natura riesce utile l' assistenza e del Naturalista, e dell' Anatomico, e del Chimico, e dell'Astronomo osservatore, e di altri simili travagliatori e operaj che gli offrono i dati richiesti a servir di base alle sue teorìe. L' astronomìa fisica a cagion d' esempio, di quelli, che le offre l' osservazione degli astri giovasi assaissimo a dimostrare ognora meglio la teorìa della gravitazione universale. Si ap-

plichi questo esempio a ogn' altro caso; nè si penerà a discernere in che consistano i diritti della Fisica, e i confini pure che vengono con bastevole precisione assegnati alle dottrine sussidiarie dall' indole degli strumenti e de' mezzi da esse impiegati. Niente vieta per vero dire che l' anatomico tenti di spiegare alcuno de' fenomeni delle macchine viventi; ma nel farlo sappia ch' ei versa sur un punto di Fisica animale; ch' egli sveste in quell' incontro il carattere d' anatomico, prende quel di fisiologo. Per simil modo è pur lecito al chimico di uscire da' suoi laboratorj, o d' introdurre in essi la fisica; ma nello spaziare pe' campi di questa non debbe già immaginare che gli oggetti su cui versa, vengano per questo staccati dalla Fisica e conquistati alla Chimica. Di queste divisioni, aggiugnerebbe forse Bacone, di questi Scismi ritengo che nuocer possano allo studio della natura, privandolo del pregio di posseder nella Fisica un comun tronco, a cui mettano, quali come radici, quali come rami, le discipline diverse, in cui si è costretto a concepirlo diviso. Per altro nell' indirizzarsi ai fisici e ai chimici ei molto si compiacerebbe vedendo che malgrado le pretensioni degli uni e le cessioni degli altri, trovansi d' accordo nell' assistersi scambievolmente; e gli conforterebbe forse a collegarsi anche più strettamente. Intorno a che arrestandosi in modo speciale a conversare co' chimici, ei forse risovverrebbe loro fra i precetti e consiglj registrati nelle sue opere quel-

lo per cui ci prescrive il passare a Vulcano ad Minervam, *chi vuol pure penetrare addentro nell' intima composizione de' corpi. Questo ammonire i chimici a diffidare del fuoco; questo invitargli ad introdurre ne' loro laboratorj Minerva coincide, se ben si mira, coll' impor loro d' intendersela co' veri e grandi Fisici. Esso non sarebbe senza dubbio avaro di encomii verso quella moltitudine di strumenti e di mezzi ignoti a' suoi dì, di cui essi si valgono nell' analisi de' corpi, verso quelli soprattutto, con cui riescono ad afferrare e imprigionare e suggettare all' esame molte sostanze sottili, fugaci, aeree, che dianzi ivan perdute. Ei parimente converrebbe dell' utilità somma di procedere com' essi fanno in ogn' incontro, colla bilancia alla mano. Nel commendarneli altamente chi sa tuttavìa che, conformemente alle sue vaste e profonde vedute, non si facesse a persuaderli a non ripor già in questa per se stessa lodevolissima pratica nè l' unico e ultimo criterio dell' esistenza d' ogni naturale sostanza, nè l' estremo limite delle loro ricerche. Non debbon essi credersi disdetto di alzar lo sguardo anche alle sostanze imponderabili, nè temere di essere riguardo a ciò sprovveduti in tutto di mezzi. Forsechè ogni naturale fenomeno non cade sotto i sensi quanto il peso? E come attesta l' esistenza di qualche agente, così non può guidarci a svelarne alcune proprietà, sebbene di esso si avveri che non sia oggetto immediato del tatto, della vista, e forse di niun*

senso? Di queste sostanze imponderabili chi sa dirne quanto sieno e numerose e svariate? In esse ha la natura probabilmente chiuso l'arcano delle sue forze, cui è d' uopo cercare ne' minimi, negl' invisibili. D' altra parte de' corpi tutti, quali cadono sotto i sensi, e più degli organici e viventi si osserva che per una non interrotta successione di assidue vicende compongonsi e decompongonsi, e ne prorompono e se ne svincolano infinite sostanze che più o men presto rimangono assorbite entro nuove combinazioni, e nello stato di libertà dispiegano per solito una energia sovraggrande, cui sembran perdere ne' composti, e che più veramente rimane per l' azion loro reciproca attutita ed ecclissata in guisa che sembra inerzia ciò che non è che equilibrio, come per mo' di esempio ne' cunei di una volta il peso loro tutto si esercita nel contrasto scambievole. Di molte tra queste sostanze può sospettarsi fondatamente che nello stato di libertà e nella forma di atomi sciolti e finissimi sieno imponderabili. Veggo, proseguirebbe forse Bacone, che parecchie fra le dette sostanze o posseggono nell' atto che sgorgano, o assumono agevolmente la forma aerea, nella quale mercè gli artificii da voi per grande vostra ventura immaginati, vi è lecito di sottoporle all' analisi e alla bilancia, e meritamente vi compiacete della nuova chimica pneumatica da voi creata. Ma chi sa dirne di quante altre si avveri che non prendono questa forma, e trovansi in uno stato

che le sottrae ai mezzi e strumenti ordinarj della chimica? Mentre d' altra parte, chi le trascuri, rimane un voto immenso nella interpretazione de' naturali fenomeni. Sembra lecito di affermarlo della più parte delle emanazioni odorose sì svariate, sì numerose, sì energiche, e nella estrema sottigliezza delle particelle loro integranti sì composte e moltiplici; la qual composizione di dette molecole se i cani fossero fisici, essi in cui l' odorato tien luogo, può dirsi, di tatto, non esiterebbero a riconoscere. Quali effetti e quanto notabili sulle persone di nervi mobili non risveglia qualche volta l' odore senza dubbio imponderabile, di che per un tempo lunghissimo poco muschio impregna le stoviglie e l' ambiente che le circonda? Anche un altro esempio. Quali sono i mezzi, gl' istrumenti, gli artificii chimici che potrebbero assisterci a discernere nelle croste, in cui rapprendesi la marcia vajuolosa, l' esistenza o la mancanza di quel principio attivissimo, per cui quali riescono inerti, quali opportune all' innesto? E pure qual prodigiosa differenza non le separa? Tale che mentre le une sono innocenti, le altre ponno accendere una malattìa che per l' attitudine del seminio a moltiplicarsi riempie qualche fiata di stragi e di lutto una intera provincia. La conseguenza a cui traggono queste considerazioni si è che se pure agognano i Chimici a formare un tutto co' Fisici, debbono ritenere bensì l' uso e impiego de' mezzi tutti proprj della lor arte, e porre an-

zi studio onde aumentarne l' utilità e l' efficacia, ma ove questi per la natura degli oggetti manchino all'uopo, niente vieta che accostandosi ai veri e grandi fisici tentino di ravvisare nel complesso degli effetti e fenomeni tutti che occorre loro di spiegare, l'indole e le proprietà dell' agente da cui derivano. Certo che in tale incontro convien procedere colla massima oculatezza, e attenersi ai precetti e al metodo della più severa ed esatta e rigorosa induzione. Ma non può mai esser disdetto di sollevarsi da ciò che cade sotto i sensi a ciò che non può esserne oggetto immediato; ed era questo lo scopo a cui io mirava quando nel mio stile sempre alquanto figurato confortava i chimici a passar qualche volta da Vulcano a Minerva. Per altro prima di congedarsi dai Chimici ei si congratulerebbe con essi vedendoli disposti a giovarsi di un nuovo strumento offerto loro da unFisico; del Piliere dell' illustre Volta, che ha saputo con esso indovinare e imitare l' arcano e gl' ingegni segreti di quell' organo da cui parte il colpo e la scossa avventata dalla Torpedine; scoperta ammirabile, di cui non si esita a dire, che a celebrarla degnamente converrebbe che risorgesse Bacone.

Ben sembra ch' ei non potrebbe astenersi dal deplorare lo stato in cui mirerebbe a' dì nostri quella fra le naturali scienze, cui la somma sua utilità raccomanda sopra ogni altra, trovandosi ad essa affidata la custodia della sanità e della vita. Ei non potrebbe non

corrucciarsi allo scorgerla di nuovo in preda alle vanità e al furor de' sistemi, e forse accenderebbesi di qualche ira, incontrando citato se stesso e abusato il suo nome autorevole in alcune produzioni dettate da uno spirito direttamente opposto alle vedute, ai precetti, alle massime da lui promulgate solennemente. Quando tutto ne confortava a sperare che mercè gli acquisti grandi per vero dire fatti da questa scienza ne' due ultimi secoli essa potesse omai, innestandosi sul grande albero dello studio della natura avvantaggiarsi degl' incrementi di questo, ecco che queste speranze dileguano, e teorìe quasi nominali e una specie di gergo prendono il posto di quel metodo di ragionare, di cui modelli sì esimii ci si offrono nelle opere de' grandi Fisici. Intorno a che sebbene non potessero non esser presenti a Bacone i pericoli e gli urti, a cui per solito si espone chi osa muoversi a ritroso della corrente, pur difficilmente tratterrebbesi dal recare una osservazione, cui gli sembrerebbe che dovesse far qualche colpo sugli animi non prevenuti. Io, direbb' egli, negli scritti del Novatore, da cui prende il nome la scuola che signoreggia attualmente, e per poco non tiranneggia tutte le altre costrette in faccia di essa a tacersi non veggo impiegata niuna delle grandi scoperte, delle quali dopo la felice instaurazione degli studj fisici si è arricchita la scienza. La nuova dottrina, qual la incontro accolta e con tanto fasto proposta poteva nascere due secoli addietro, a'

a' miei tempi, anche prima de' miei tempi. Da vero che basta questa osservazione a muovere in me un sospetto veemente assai che trattisi di cosa, di cui giova sperare che non si tarderà gran fatto a scorgere la leggerezza in un secolo, in cui, se gli uomini vanno sempre soggetti ai traviamenti, non mancan loro i mezzi di avvedersene e di rimettersi nel diritto sentiero. E questo sospetto in me cresce a più doppii al vedere l'arroganza de' novatori spinta a tale che non si risparmiano gli scherni ad Ippocrate, e si giugne anzi a bestemmiar la natura e le forze medicatrici della medesima. Verso i pochi difficili ad ammettere la nuova dottrina odo nelle bocche di molti il rimprovero di Orazio. Di essi so che si dice che rifiutano quae imberbes didicere senes perdenda fateri, *e non nego che l'età e l'abitudine non cresca forza a' pregiudizj qualunque, non gli confetti per così dire rendendogli quasi indelebili. Ma la sperienza ne ammaestra altresì che tenaci non meno delle proprie idee si mostrano i sistematici, de' quali, nè se ne adontino essi, spesso si avvera che a sostenerle recano una pertinacia, la qual per poco non confina con quella che distingue i settarj. Così forse direbbe Bacone, di cui tuttavia può dubitarsi se la voce fosse ascoltata.*

Ma la calma e il sereno gli ricomparirebbe sul volto nel rivolger lo sguardo e arrestarlo su le matematiche. Una dolce sorpresa in lui desterebbe il prodigio dell' altezza a cui le ammirerebbe salite, e de' vantag-

gi che hanno esse fruttato a più rami delle naturali scienze si congratulerebbe con queste, coll' età nostra, con se medesimo. Perchè in fatti agli occhi suoi lincei già non isfuggì che lo studio della natura, ove fosse coltivato a dovere, più o men presto si gioverebbe dell' assistenza della geometria. E osò annunziare, e presso i posteri si fece mallevadore che il patrimonio delle scienze fisiche si arricchirebbe di alcune parti ignote a' suoi dì, alle quali potrebbe darsi acconciamente il nome di matematiche miste. Forse che non avrebbe egli motivo di compiacersi di una predizione, cui scorgerebbe sì splendidamente avverata? Più; egli apertamente ammonisce le matematiche a non arrogarsi già di guidare e preceder la Fisica, ma sibbene di seguirla, vale a dire, di aspettare che i progressi di questa offran loro i dati onde associandosi ad essa aggiungerle perfezione e compimento. Pare ch' egli anticipando sul futuro fra gli altri esempii che potrebbon recarsi, prevedesse che l' instancabil Keplero colle faticose sue osservazioni sopra Marte e la scoperta della relazione fra i tempi periodici de' pianeti e le distanze loro dal Sole, porrebbe in mano a Neuton i mezzi, di cui valersi ad innalzare il maestoso edificio della teoria della gravitazione universale.

Benchè se sono queste prove luminosissime della sagacità straordinaria del gran Cancellier d' Inghilterra, qual concetto anche più alto non ci formerem noi di

quella del suo contemporaneo Galileo, a cui è dato di poter dire col greco scultore della statua di Minerva; ciò che il mio collega ha maestrevolmente e copiosamente mostrato che converrebbe di fare, io lo farò; e che anzi prevenendo ogni suggerimento altrui creò nuove scienze e pose arditamente la prima pietra dell'edificio.

La meraviglia non pertanto e il giubilo e la compiacenza probabilmente non impedirebbe a Bacone di accoppiare alle congratulazioni e agli applausi alcune ammonizioni. Ei non esiterebbe a dichiarar degni di qualche alquanto severa censura quelli che in mezzo allo splendore, a cui è giunta la Meccanica teorica, tengono un cotal linguaggio, per cui o si mostrano o sembrano almeno persuasi che molte operazioni naturali sottraggansi al dominio e governo delle leggi meccaniche. Eh che, direbbe egli, queste leggi sono di una verità assoluta ed eterna, nè non è possibile che non vengano in ogni incontro e riguardo ad ogni classe di esseri puntualmente osservate. Sono esse siccome i pilastri, su cui in mezzo alla non interrotta successione di assidue e perpetue vicende, reggesi stabilmente la mole mondiale; e la meccanica teorica con tal fedeltà rappresenta quella della natura che in essa ci si offre come una specie di ponte di aperta e reciproca comunicazione fra il mondo intellettuale e il mondo reale. Il perchè, aggiugnerebbe egli, delle spiegazioni qualunque de' naturali fenomeni vuolsi stabilire, ch' esse la più

parte non ne sono che meri abbozzi, e tali rimangonsi finchè a compierle ed esaurirle non sopravvenga il meccanico, a cui meglio che ad ogni altro compete il nome e il grado d' interpetre e sacerdote della natura. Non ha dubbio che in questa opinione non consentano i veri e profondi conoscitori; ma mi turba alquanto e mi rattrista il vedere divenuti omai famigliari i termini di forze meccaniche e immeccaniche; quasi che potessero esisterne di quest' ultima specie; quasi che la severa e rigorosa meccanica non si creda disdetto d'ingerirsi a cercare la natura delle forze, e non sia contenta di porre alla testa di tutto certi Assiomi dai quali pende l' intera catena delle sue dottrine, e cui rispetta ogni maniera di forze senza eccettuar quelle nè anche che sulla materia dispieghino per avventura gli stessi puri e sciolti e liberi spiriti. E pure mi accorgo che degli esseri massime organici e viventi non manca chi opina che sieno provveduti di principj di azione insofferenti del giogo delle leggi meccaniche; e con dolor veggo che questa resia contamina più libri ai quali sotto altri aspetti non mancano pregj che ne aumentano il pericolo e il danno.

E a fin di valersi anche sull' ultimo dell' introdotta finzione, sia lecito di porre in bocca del personaggio che si suppone risorto, un' altra osservazione, di cui malgrado questo ripiego si teme che venga per avventura dichiarata arrogante. Di lui è permesso l' imma-

ginare che partendo dall' eliso e dal consorzio con Newton e Leibniz, che deposta in quel beato soggiorno ogni emulazione quivi conversano alla dimestica, sia pur largamente provveduto delle notizie richieste a portar giudizio de' recenti grandi progressi del calcolo sublime e sugli sforzi pe' quali un genio nulla inferiore a quelli che da prima crearono questo calcolo, tenta ed è riuscito per ciò che risguarda la solidità de' principii che gli servon di base, a spingerlo alla sua perfezione. Ei riconoscerebbe che l' analisi è tenuta a questo suo sommo coltivatore di averne prodigiosamente allargati i confini, e oltre a ciò rischiarato l' ingresso e assodate le fondamenta. Mercè sua, direbb' egli, sgombrano in tutto le nozioni alquanto o inesatte o nebbiose dell' infinito e dell' infinitesimo, che con qualche discapito non mica della certezza ma della evidenza erano in essa impiegate: e a lui pure debbe l' analisi di aver mostrato che a tergere questa specie di macchia bastano le sue proprie forze; ch' egli è nel suo seno e nella dottrina delle serie e nella organizzazione e struttura di queste ch' essa possedeva i mezzi acconci all' uopo di procacciare ad ogni parte de' suoi metodi quell' ultimo e assoluto rigore che ne forma il massimo pregio, e debbe per tutto ugualmente risplendere. Ma nel commendare altamente le recenti correzioni e riforme aggiunte alla metafisica del calcolo sublime, con qualche rammarico ei forse mirerebbe i tentativi pe' quali taluno si

annunzia disposto ad avvolgere nella proscrizione di certi termini meno che proprj e di certe idee, se così vuolsi, inesatte, i simboli anche adoperati in quel calcolo, e un Algoritmo, a cui l' analisi è tenuta di tanti trionfi. Avrem noi il coraggio di spogliarla d' uno strumento sì maneggevole, sì docile a prestarsi ad ogni suo uso e bisogno? E ne la priveremo pel motivo o pretesto che la teoria ne è infetta d' idee meno che giuste espresse con termini poco proprii? Ma se queste idee voi le avete già interpetrate e raddrizzate quanto è mestieri a purgarle da ogni inesattezza? D' altra parte sulle conchiusioni, a cui esso guida, vi è lecito di riposare tranquillamente. Oltrechè ve ne rende certi una induzione estesissima, illimitata, voi lo avete suggettato al crogiuolo de' nuovi metodi, coi quali vi siete assicurati ch' esso va sempre pienamente d' accordo. Per quale svogliatezza del buono vorrete dunque obbligarne a rinunziare al prezioso vantaggio ch' esso ne procaccia della semplicità e brevità nelle operazioni analitiche?

Non è impossibile che arrestandosi anche un momento su questo articolo Bacone aggiugnesse, ch' ei non è mica interamente convinto della necessità d' introdur grandi riforme nella metafisica del Calcolo sublime. Certo che, direbbe egli, tenebrose assai sono le idee d' infinito e d' infinitesimo, e quelle non meno di quantità minori di qualunque assegnabile. Non esito a confessarlo; ma nell' atto stesso veggo colla massima perspicuità

che non ha quantità tanto grande nè tanto picciola, di cui non possa assegnarsi una respettivamente o maggiore o più picciola. Da questo assioma pendono i ragionamenti tutti del calcolo detto differenziale e del suo reciproco; e in questo stesso assioma è riposta la chiave richiesta ad interpetrare il linguaggio simbolico di cui esso si vale a rappresentare que' ragionamenti, e a richiamarli all' animo coll' imprimerli sulla carta. O io molto m' inganno o egli è pure all' oggetto di epilogarli, supplendo ai lunghi giri e tortuosi, ne' quali converrebbe avvolgersi, chi volesse al loro sviluppamento impiegare ogni volta l' Assioma mentovato, che odonsi tuttavia nelle bocche degli Analisti i nomi d' infinito e d' infinitesimo. Sono essi questi termini una espressione concisa di detto Assioma o principio, cui implicitamente rammentano e in cui trova l'Analista il soccorso acconcio e bastevole ad assisterlo nel passaggio frequente e inevitabile dal discreto al continuo, vale a dire da una nozione ad un' altra essenzialmente diversa, e che non pertanto, mercè l' accennato soccorso soffre l' applicazione del calcolo, il quale, comecchè versi a rigore su le quantità discrete divien capace di svelare anche le proprietà e le affezioni delle continue.

Ma è omai tempo che Bacone prenda congedo. Possa la purezza e rettitudine delle intenzioni di chi si è presa la sicurtà di evocare un tant' uomo, scusare l'ardimento di averlo fatto, e la debolezza delle riflessioni

postegli in bocca. Bene ei si lusinga che niuno non sorgerà a riprenderlo come s' ei mirasse col muover dubbii a porre per quanto è in lui qualche inciampo al corso prospero delle scienze. Il così fatto rimprovero moverebbe da una specie di despotismo letterario, di cui giova lusingarsi che nè anche pel motivo o pretesto di ottenere lo scopo d' altronde per più riguardi lodevolissimo della uniformità nella istruzione non giugnerà ad introdursi. A renderlo giusto converrebbe che la verità in niun incontro temer potesse gli esami, le discussioni. Tutt' all' opposto è dessa certa di uscirne vittoriosa. Al qual proposito per imitare anche sull' ultimo Bacone che amava di citare e di rafforzarsi dell' autorità altrui, ben disse un saggio antico che magna est veritas et praevalet.

ESTRATTI.

OSSERVAZIONI DI MEDICINA PRATICA

Della medicina pratica è lecito il dire che malgrado i progressi di quelle fra le naturali scienze che più da vicino servir ponno ai suoi usi e porla a qualche tempo in istato di possedere una teoria che le serva di scorta, essa di gran lunga non è giunta per anche a procacciarsela e conseguentemente che dura in lei quanto in addietro il bisogno di raccogliere osservazioni e farne conserva e tesoro. In questa raccolta sono a giudizio de'saggi riposte le solide ricchezze di un'arte, l'esercizio della quale, se ben si mira, in altro non consiste che nell'applicazione giusta quanto è possibile ai casi speciali di certi dommi figli della osservazione e della sperienza de'secoli; nella quale applicazione al savio e avveduto Pratico servon di guida le regole e le massime della comunale prudenza. Donde, giacchè queste ultime regole e massime, comecchè autorevoli e rispettabili, non offrono mai una guida in tutto sicura, si vede subito, che i pratici avvolgonsi fra le incertezze, nè non è molto a stupire, che anche i più periti sieno non di rado tratti in inganno. E quinci pure ognora meglio si scorge la necessità assoluta di non cessar di arricchire di nuove osservazioni il patrimonio dell'arte, recando all'uopo una certa scelta, per cui principalmente si tenga registro di quelle che si ri-

feriscono vicinamente alla pratica, e le promettono vantaggi solidi e non equivoci. Questo pregio si ravvisa palesemente nelle osservazioni delle quali siamo tenuti allo zelo del collega Laghi egregio pratico e rinomato e di carattere oltre a ciò ingenuo e verace e degno d'ogni fiducia; la qual ultima condizione quanto sia necessaria ben mostrano gli esempii recenti e non rari di parecchi rimedii proposti col maggior fasto, e de' quali l'esperienza ne ha instrutti che l'efficacia di gran lunga non corrisponde ai vanti e alle promesse.

Versa la prima di queste osservazioni sull'uso interno ed esterno di quella specie di olmo che l'illustre Duhamel appella piramidale. Un valoroso medico franzese, il sig. Banau commenda altamente e raccomanda la corteccia di questa pianta arborea, dichiarandola efficace a domare diverse affezioni cutanee fastidiose al sommo, e per le conseguenze a cui trar ponno, non disgiunte da pericolo, pertinaci oltre a ciò e ribelli agli altri soccorsi dell'arte. Tali sono certe specie di scabbia; certi erpeti, ove massime con esse concorra la complicazione non rara di altri difetti della massa de' fluidi, come di labe scorbutica o celtica. Nè l'utilità del rimedio già non si restringe a certe malattie cutanee; ma ne comprende altre, come i dolori artritici sì tormentosi, sì ostinati, quando a mantenergli concorre qualche vizio generale de' fluidi, quello in ispecie dell'acrimonia detta scorbutica, di cui ai veri pratici ben son noti i caratteri specifici; comecchè debba confessarsi che il termine, qual corre nelle bocche de' medici volgari, è di significato alquan-

to vago ed incerto. Alla virtù medicamentosa non partecipa già l'intera corteccia. Trovasi essa raccolta e ristretta nella sua parte interna, che potendo a motivo della struttura a strati della stessa senza stento staccarsi dal resto, acconciamente si appella corteccia interna, e prende anche il nome di libro. E' dessa piuttosto sottile e morbida e pieghevole e lubrica al tatto. Vuolsi raccogliere e separar dall'albero nel maggio: tempo in cui si mostra e più succosa e più energica. Si pratica nella forma di decozione stretta, come suol dirsi, anzi che no; giacchè due oncie di corteccia debbono a fuoco lento bollire in sei libbre di acqua pura, franzesi senza dubbio, che corrispondono a libbre otto di oncie dodici; e debbon queste scemare di due terzi. Nel residuo da prendersi la mattina a digiuno consiste la dose giornaliera ne' casi almeno ordinarii. Il colore ne è una cadenza di purpureo; e il sapore, quanto almeno può questo pregio averlo un medicamento, non ne è ingrato. Ne' casi di singolare o gravezza o pertinacia del male converrà raddoppiarne la dose quotidiana, e anche triplicarla; nè riuscirà pure inutile il valersene esternamente sulle parti affette nella forma di fomenti e di bagni.

Premessa questa narrazione passa il collega Laghi ad informarne dell' esito de' suoi tentativi. Ei lo fa succintamente ed è contento di assicurarne che le sue prove istituite in più incontri e più volte pure sopra ognuna delle indicate affezioni consentono per la massima parte con quelle del medico franzese, e concorrono ad avvalorare ognora meglio le speranze che la medicina pratica siasi nella corteccia dell'olmo pi-

ramidale arricchita di un nuovo presidio contro malattie delle quali essa si duole che spesso ne deludon le forze. Nè solo il rimedio gli riuscì utile a domare le mentovate affezioni cutanee, ma ne ottenne pure vantaggi non equivoci in alcuni casi di artritide ostinata e complicata con labe scorbutica o con lue celtica. Intorno a che arrestandoci un momento su quest'ultimo caso non sia disdetto di avventurare un sospetto. Perchè chiunque abbia presente che nella lue celtica e in ognuno de' suoi effetti è mestieri riconoscere la forza e l'attività malefica di un particolare seminio o miasma o veleno che voglia dirsi, d'indole specifica, ammetterà pure nelle sostanze medicamentose qualunque che vengono utilmente impiegate contro i detti effetti, qualche carattere che le renda specificamente opportune a rintuzzare e domar quel veleno. Un carattere tale chi ne assicura che non lo possegga la corteccia interna dell' olmo piramidale? Nè oppongasi che questo è un mero sospetto e come tale indegno di veruna accoglienza. Perchè mettendolo anche da parte e considerando l'affare sotto un punto di vista più esteso, della medicina pratica è lecito il dire ch'essa già non si adonta nè rifiuta di tener conto delle mere congetture e delle viste offertele dalla semplice analogìa. Guai se qualche volta non le ascoltasse! Nella mancanza in cui trovasi pur troppo d'una vera e solida teoria per poco non le sarebbe tolto di crescere, o i suoi progressi sarebbero senza confronto più lenti: le mancherebbero i mezzi onde variare le osservazioni, moltiplicarle, aprir loro nuove strade. E per non dipartirci dalla lue celtica, del

gran Berengario si sa che ad esperimentare contro di essa il mercurio guidollo l'analogia e l'efficacia a lui nota dello stesso in certe malattie cutanee. L'esito sorpassò di gran lunga le speranze, e il genere umano fu per sua grande ventura proveduto in questa minerale sostanza del vero antidoto contro il veleno sifilitico. Per altro meglio anche che non queste considerazioni generali a qualche difesa del propòsto sospetto serve il dato offertoci dal nostro collega, pratico tale e di un occhio sì esercitato e sicuro che nel dichiarare complicati con lue i dolori artritici scomparsi sotto l' uso dell' olmo piramidale merita ogni fiducia. Questa gli è pur dovuta là dove aggiugne che le sue osservazioni non vanno d' accordo con quelle del medico franzese riguardo all' uso esterno del rimedio nelle infiammazioni superficiali e serpeggianti sulla pelle, come nelle risipole. In queste gli è sembrato ch' esso lungi di avvantaggiarsi ceda piuttosto alle ordinarie applicazioni temperanti, refrigeranti da gran tempo adottate nell' arte.

Meritamente ha pure rivolta a se l'attenzione del nostro collega un altro vegetabile salito, non ha moltissimo, a grande celebrità, cui non pare ch' esso al presente ritenga, al grado almeno a cui presso alcuni era giunta. Intorno a che non è forse inutile di osservare che il credito de' rimedii va soggetto a vicende e pericoli anche perchè l' interesse sommo recato ai medesimi dagli uomini non permette loro di giudicarne con fredda e tranquilla imparzialità. Sulle prime vengono essi spesso assai magnificati oltre il dovere; ma perchè più o men presto si scorge che le

promesse e speranze erano eccessive, accade agevolmente, che trascorrendo all'opposto eccesso, all'enormezza de' vanti succeda l'ingiustizia de' biasimi, per cui con discapito dell'arte le vengan tolti presidii, di cui per l'attività loro mediocre sì veramente ma non pertanto reale potrebbe essa far suo profitto. E a questo proposito non vuolsi occultare un altro danno gravissimo che dai medici saggj chiede e aspetta provvedimento. Perchè di alcuni rimedii sembra lecito il dire che giacciousi nell' oscurità e nell' obblio dopo che altri più di essi efficaci sono sopravvenuti a toglierli in tutto dalle mani e dalla notizia de' pratici. Or vuolsi osservare che nella varietà sovraggrande delle circostanze, de' soggetti, de' casi, u' ha di quelli talvolta che mettono in fallo i soccorsi noti e lodati e cederebbono ad altri meno efficaci in genere, ma in quell' incontro speciale più conformi all'uopo; chi oltre il conoscergli possedesse i metodi e le regole tutte già tempo conosciute dai pratici. Ma chi non vede che questi metodi e queste regole sono rimaste avvolte nella dimenticanza in cui è caduto il rimedio con danno grave di un'arte, di cui converrebbe che ritenesse tenacemente ognuno degli acquisti già fatti, nè gli scarsi suoi fondi soffrissero niuna perdita.

Ben si dovrà nettar questi fondi da ogni superfluità e apparente ricchezza, e conceder posto in essi soltanto alle merci di valor reale; al quale scopo lodevolissimo mirano le osservazioni del nostro collega, e fra gli altri i tentativi da lui sopra parecchj soggetti istituiti co' fiori di Arnica. Alcuni, come si è non ha guari accennato, levano a cielo questi fiori, e ne nar-

ran prodigj, ai quali concilian fede recando osservazioni numerosissime degli effetti lor vantaggiosi. Fra gli altri e sopra gli altri vengono essi commendati dal sig. Collin dotto medico viennese che avendo in sua balia lo spedale paxmariano ha potuto suggettargli a più prove. Ei gli dichiara utili in più malattie acute e croniche; nelle febrili anche come nelle febbri comunemente fino almeno a questi ultimi tempi dette putride, nelle quali ponno i detti fiori a parer suo gareggiar con vantaggio co' più lodati antiseptici. Nè di queste sole, ma delle febbri eziandio intermittenti e di più complicate ad arresti e congestioni nelle viscere abdominali ei ci assicura che in ben trentasette casi il rimedio giunse a troncarle, mentre contro esse era riuscita a voto l' efficacia stessa specifica del febrifugo peruviano. I più non ispingon tant' oltre la loro fiducia, e si restringono quasi a prescriverlo ne' casi di paralisi prodotta da cagioni proprie del membro affetto, o sia independente da vizio dell'encefalo. Quelli che da prima lo introdussero furon contenti di attribuirgli qualche efficacia a sciogliere nelle gravi contusioni e rimettere in circolo il sangue delle più o meno estese e profonde echimosi che le accompagnano. In mezzo a questa varietà di opinioni sembra che sieno tutti a bastanza d' accordo nel riconoscere in esso una facoltà per cui promova l' escrezione del traspirato insensibile. Or qui è appunto dove l' esperienze del Pratico bolognese vengono con questa opinione direttamente a contrasto. Sotto l' uso del rimedio non gli si offerse il più lieve indizio di aumento di quel traspirato. In una donna afflitta da do-

lori reumatici, malattia posta dai fautori dell' arnica fra quelle che ne ascoltan la forza, sotto l' uso della stessa la pelle si mantenne arida qual era dianzi, nè niun sollievo pure provò l'inferma, e fu d'uopo, veduta l'inutilità del rimedio, aver ricorso ad altri, mercè de' quali ebbe il medico il contento di congedarla dallo spedale risanata. Nè niun sospetto già non cade o sull' inerzia del rimedio o sulla scarsezza della dose; perchè i fiori erano giunti di fresco dal monte Baldo, e furono fin da principio prescritti in sostanza nella quantità giornaliera di ventiquattro grani; dose che vien dichiarata la massima, cui la prudenza consigli a non oltrepassare. Sorde parimente all'azion del rimedio si mostrarono e le affezioni paralitiche, e le convulsive della specie sopra ogni altra terribile delle epilettiche in cui fu desso sperimentato; e qui pure si nota che sotto l'uso dello stesso nè comparve sudore, nè crebbe niun' altra escrezione. Non meno inutile fra le mani del nostro Pratico riuscì il rimedio contro le febbri intermittenti. Scelse casi e soggetti conformi a quelli dello spedale pazmariano: ma non tardò ad avvedersi che il farlo era tempo perduto; e l'interesse degl' infermi gl' imponeva di ricorrere al febrifugo del Perù, con cui ottenne in fatti l' intento, maritandolo, come gli suggeriva la complicazione degli arresti abdominali con qualche sicuro ed efficace fondente; quando colla terra fogliata di tartaro meritamente lodata da Valcarenghi, quando collo specifico del Morton riformato per altro col toglierne l' inerte stibio diaforetico e sostituirvi l'attivo sale ammoniaco.

Questo ragguaglio non consente gran fatto cogli encomii de' panegiristi dell'arnica; e non pertanto il nostro collega contento di narrare quanto ha veduto lo termina protestando ch' ei non intende di spargere niun dubbio sulle narrazioni altrui, e si restringe a dire che della diversità degli eventi debbe accagionarsi o il clima diverso o qualche circostanza a lui in tutto nascosta; il qual ultimo motivo di tener sospeso ogni giudizio davvero che a taluno potrebbe parere una mera ceremonia suggeritagli parte dalla sua indole cortese, parte da que' riguardi che i medici debbonsi scambievolmente e ponno da essi rispettarsi senza sagrificar loro gl' interessi e i diritti del vero. Questi riguardi, lusingasi l'estensor dell'estratto di non offendergli punto nel prendersi la sicurtà di osservare che di quelle paralisi contro cui fu l'arnica indarno tentata, può sospettarsi che dipendessero da vizio dell' encefalo tuttavia superstite in quella region dello stesso, donde partivano i nervi proprii del membro affetto. Or sembra che la fiducia, se pur il rimedio ne merita alcuna, restringer debbasi agl' indebolimenti paralitici prodotti da cagioni locali o almeno disgiunti da vizio attuale dell'encefalo e della origine comune de' nervi. Recasi questa distinzione a fin di abbracciare anche que' casi ne' quali l'arnica è sembrata utile, sebbene a produr l'affezione fosse palesemente concorsa qualche lesione dell' encefalo; come senza dubbio si avvera delle paralisi che sono la fatal conseguenza de' colpi apopletici, o più veramente che gli accompagnano indivisibilmente e appartenendo alla loro essenza, ne sono il criterio onde non confonder-

gli con le mere affezioni letargiche: il che si avverte perchè presso moltissimi l' apoplessia trovasi posta a mazzo colle diverse specie di letargo; nè si pon mente che questo per grave che sia è disgiunto da indizii di resoluzione delle parti. Delle paralisi che hanno questa origine se pur qualche fiata è sembrato che cedano all'arnica, è lecito di congetturare che il vizio dell' encefalo, donde nacquer da prima, fosse omai tolto o diminuito assaissimo; e a mantenerle contribuisce l'alterazione sopravvenuta alla parte affetta, di cui per solito si ravvisano in essa segni non equivoci. In simil caso come hanno luogo certi soccorsi topici e ponno riuscir utili le fregagioni, l' applicazione de' fanghi di certe acque termali, l' elettricità, così qualche vantaggio potrebbe ottenersi dall'uso interno de' fiori di arnica; cui premerebbe a chi scrive che potessero sotto qualche titolo ritenersi fra gli acquisti fatti dall' arte; e riguardo a ciò ei prega il suo egregio collega a non togliergli ogni speranza.

Ma passando a un altro rimedio di cui questi in terzo luogo ci narra gli effetti, sono essi certamente, quali ei gli dichiara, degnissimi dell'attenzione de' clinici. Senza nè rigettar nè adottare le idee soggette probabilmente a molte eccezioni e ch' ei però si restringe ad accennare di volo, proposte sull' efficacia dell' alcali volatile fluore in alcuni casi gravissimi dal celebre chimico francese Sage, ei ne reca alcuni esempii che meritano per vero dire di rimaner consegnati agli annali dell' arte. Una donna d'anni oltre ai 60 colpita di apoplessia per cui non furono sopra di essa risparmiate le deplezioni sanguigne e per giunta i ve-

scicanti, fu trasportata allo spedale. Vi giunse co'sensi interni ed esterni oppressi al più alto grado; con faccia pallida, con respiro raro e affannoso, con polsi languidi. Non volle l' assistente rimanersi in tutto ozioso, e le prescrisse una larga coppetta all'occipite. Tutto fu inutile. Il medico trovatala il giorno dopo nel descritto deplorabile stato ebbe ricorso all' alcali volatile fluore stemperato nella dose di sedici gocciole in una stretta infusione di betonica da prendersi entro la giornata. E bene: dopo trenta giorni l'inferma uscì dello spedale non più tale, ma in tutto ristabilita.

A certi riguardi conforme e a certi altri anche più raro fu il caso di un' altra donna d' anni 35 presa dopo forti patemi d' animo, da vera emiplegìa, in cui la risoluzione della metà del corpo non era disgiunta da manifesta offesa de' sensi interni. In questa l' uso esterno del rimedio o sia le unzioni congiunte a strofinazione instituite sulle parti affette con olj carichi di Ammoniaca liquida bastarono a ridonare alle membra il vigore perduto e a porla in istato di tornarsene a casa colle proprie gambe. S'ei non ha potuto esperimentare il rimedio ne' casi tutti ne' quali lo commenda il chimico franzese, all' incontro ei c' informa di averlo non senza qualche sua sorpresa veduto agire come un valido stiptico e arrestare copiose e ostinate emorragie.

I narrati felici successi lo invogliavano per l'una parte di veder casi ne' quali potesse porre il rimedio a cimento col veleno del cane rabbioso, mentre per l' altra è sì orrido lo spettacolo dell' idrofobia nell' uomo che l' animo ne rifugge. Pur troppo l' infortunio

gravissimo di cui non ha per anche due anni in Bologna e fuori parecchj furon le vittime, gliene offerse l' occasione. E' vero che un ingegnoso medico francese vorrebbe rassicurarne sulle conseguenze luttuose di quel veleno, di cui anzi ei si mostra disposto a negar l' esistenza. In un suo scritto recente ei mette fra i meri pregiudizii l' opinione che la rabbia sia contagiosa e passar possa pel morso dai cani nella nostra specie, vale a dire dependentemente dall' indole malefica e venefica della scialiva introdottasi e rimasta nella ferita. A parer suo de' sinistri terribili che ne derivano, vuolsi accagionare soltanto il turbamento dell' animo e l' immaginazione percossa da terrore, qual non può non risvegliarlo una opinione sì invalsa e stabilita. A cessarne i pericoli e i danni il miglior riparo secondo lui è riposto nel combatterla e svellerla. Nell' autore e nella sua produzione scorgonsi indizj non pochi d' ingegno, di dottrina, e anche se vuolsi, di filantropia. Lodevoli senza dubbio sono le sue intenzioni: ma s' ei non è ben certo che le sue idee sieno fondate, può dubitarsi se sia in tutto lodevole ch' ei col proporle miri per quanto è in lui ad addormentare lo zelo e rallentar l' efficacia di que' soccorsi medici ed economici che per tutto nella colta Europa costumasi di opporre anche ai meri timori e sospetti di rabbia sorta ne' cani. A mostrare ch'esse non sono di gran lunga fondate bastano le poche osservazioni seguenti.

Potrebbe chiedersi, se il morso è disgiunto da introduzion di veleno, nè non è per se stesso capace di comunicare la malattia, come dunque la persuasion

contraria sia nata da prima, e abbia potuto spargersi e allargarsi tanto fra gli uomini? Ma mettasi da parte questa ricerca; e piuttosto confessando prima, che i gravi patemi di animo alterar ponno la costituzione del corpo e trarre a conseguenze tristissime, si passi a chiedere come e per quale strana combinazione nel caso attuale accada che l' impressione ricevuta dall' animo produca precisamente quella stessa malattia che preesisteva nel cane, e di cui esso perisce. E' questo il fenomeno intorno a cui l' ingegnoso franzese è invitato a dar prove del suo ingegno nell' interpetrarlo e spiegarlo. Più; ei non ammetterà senza dubbio immaginazione molto vivace ne' bruti, meno poi negli asini; e pure non mancano esempii di questi ultimi divenuti idrofobi dopo il morso del cane rabbioso. Non esita chi scrive ad assicurarlo di aver lui veduto perire miseramente una donna non morsicata ma lambita soltanto e leccata da un suo cagnolino che sulle prime, come suole osservarsi, rispettò la padrona nell' ingresso della malattia, all' inoltrare di questa e manifestarsi spiegatamente fu ucciso senza lasciargli tempo di nuocere a veruno. Da lì a circa 40 giorni comparvero nella meschina i sintomi del morbo, di cui sospettava essa sì poco, che solo in quell'incontro in mezzo alle ricerche fattele le corse all' animo la particolarità mentovata d' essere stata lambita. Vuol dire che a motivo o della sottigliezza dell' epidermide delle labbra o di qualche minuto sfregio e taglio il veleno s'introdusse. In un altro soggetto è pure a lui presente che l' ingresso del male caduto anch'esso nel quarantesimo giorno dopo il morso fu annunziato da

vivi dolori della mano guarita nell' esterno delle ricevute ferite. Inoltrando il male, inoltrò con esso verso l'alto il dolore prima al cubito e al gomito, poi all'omero e alla spalla, poi al collo e alle fauci, dove gli si associò un cotal senso di tormentosissimo stringimento. Si direbbe che i dolori additavano la strada e il corso del veleno divenuto mobile e attivo. Questo fenomeno gliene fa sovvenire un altro narratogli da un professore dottissimo, che può pregiarsi di avere felicemente curati alcuni idrofobi. In essi fra gli altri sintomi ei notò ed osservò, secondo che pel morso erano state ferite le estremità o superiori o inferiori, le ghiandole o ascellari o inguinali dolenti e rigonfie per congestione e arresto di umori. Come e in qual guisa accade egli che l'immaginazione colpita da terrore trattenga gli umori piuttosto in certe ghiandole che in altre? In somma l' ingegnoso franzese è pregato a valersi della sua ipotesi nella spiegazione di questi fenomeni. Ma è meglio tornare al nostro collega che potrebbe muovere qualche querela di vedersi dimenticato.

Ei riferisce due casi; l'uno di un giovanetto di anni 14; l'altro di un vecchio sessagenario, morsicati entrambi da cani sospetti fortemente di rabbia. A buon conto nel caso del giovine il sospetto giugne quasi al grado di certezza; giacchè nell' istesso infausto accidente il cane si avventò anche sopra una fanciulla che trasportata nello spedale di una città vicina quivi malgrado i soccorsi amministratile perì miseramente idrofoba. Tentò il nostro pratico sopra entrambi questi soggetti l'Ammoniaca liquida nella dose di dieci goc-

cie mattina e sera allungate entro un grato giulebbe, come è mestieri ad impedire che la causticità del rimedio non offenda le fauci, l' esofago, il ventricolo soprattutto ov' è costretto a soffermarsi. Ne protrasse a lungo l' uso, alquanto più nel vecchio che nel giovine. Non manifestandosi in essi niun indizio della malattia, dopo di avergli tenuti nello spedale quanto fu creduto necessario, ne furono congedati; nè dopo fino almeno al presente si ha motivo di credere che sieno stati esposti al temuto infortunio. Da questi due casi ei non vuol già che si tragga niuna conseguenza a favore delle idee e promesse del chimico francese, che nell' Ammoniaca liquida ravvisa l' antidoto come di più altri, così del veleno del cane rabbioso. Gli basta d' inferirne ch' essi non si oppongono a queste speranze, e fino a un certo segno sembran permetterci di ritenerle.

Noi lodandone la circospezione passeremo a far menzione di volo di un quarto suo tentativo intorno a un soccorso proposto di fresco con molta fiducia da un professore di Edimburg contro una malattia comunemente non a torto riposta fra i tanti obbrobrii dell' arte, vale a dire la Gotta. Contro di questa pretende il medico scozzese di avere sopra se stesso esperimentata utilmente l' efficacia del vapore dell' acqua bollente a cui venga esposta la parte affetta quando il tumore è giunto al massimo grado e più in essa infierisce il dolore. Fondato sulle sue esperienze ei destina il rimedio a cessare una volta i lamenti e lo scandalo di una malattia di cui si crede che metta in fallo ogni forza dell' arte. A una speranza tale non

ci permettono di aprir l'animo quelle del pratico bolognese istituite sopra tre soggetti. Lo guidano esse a riconoscere nel rimedio la facoltà di agire come un topico calmante, ma non quella di gran lunga di sradicare la malattia. E quì giacchè l'estensor dell'estratto si è preso più d'una volta la sicurtà d'interporre al ragguaglio qualche sua riflessione, ei prega il suo degno collega a permettergli di farlo anche in questo incontro. A lui sembra che il professor d'Edimburg siasi dimenticato che non senza fondati motivi la gotta, nell'atto che nasce spesso da errori proprj dell'individuo, è riposta fra le malattie che non di rado i figlj redan dai padri. Davvero che questa particolarità ove gli fosse stata presente, avrebbe in lui indebolita la lusinga che il suo rimedio bastasse a domare la malattia radicalmente. Benchè questa stessa particolarità sembra che ne obblighi a non adottare in tutto l'opinion comune, per cui in seguito di qualche estrinseca simiglianza si crede che tra l'Artritide e la Gotta passi un'affinità tale che confini colla fratellanza. A buon conto dell'Artritide non si osserva che passi per eredità.

Ma è meglio terminare con un'altra riflessione di una utilità più estesa assai suggeritaci dal dono fattoci dal nostro collega, di cui giova sperare che abbia inteso di darne con esso un'arra e un pegno di altri doni conformi. De' pratici si osserva che dovendo essi avvolgersi nel vortice delle faccende mediche, manca loro per solito il tempo e l'agio di consegnare agli scritti e rendere di ragion pubblica certe speciali osservazioni, cui ognun d'essi ove non sia d'ingegno

in tutto ottuso, debbe al lungo esercizio, quali sulle malattie, su quelle massime che regnano nel paese in cui esso soggiorna, quali su i rimedii di cui costuma di valersi a preferenza degli altri. Ognun pure di essi più o men presto adotta certe speciali pratiche raccomandategli dalla propria sperienza. Or di queste speciali osservazioni e di queste pratiche pur troppo si avvera che la più parte al mancar de' clinici rimangon con essi sepolte con discapito grande dell' arte, che anche per questo rimansi in uno stato di lagrimevole povertà che i saggj non cessano di deplorare. Chi sa che a togliere sì grave inconveniente servir non potesse l' imporre a chiunque scelga questa professione nell' atto che gli si dà la facoltà di esercitarla, l' obbligo di tenere un breve e succoso registro delle osservazioni alquanto notabili, che per avventura gli si offrano, e delle pratiche eziandìo e de' rimedii e de' metodi di cui ei fosse per trovarsi in modo speciale contento? Ei dovrebbe a imitazione ma senza la pretensione di Dower che ne diede il primo rimasto fin' ora unico esempio, dovrebbe, dico, vincolarsi a lasciare questa specie di testamento a favore dell' arte, onde consegnandolo colla stampa ai suoi fondachi essa potesse approfittarne. E' assai naturale che a crescerla e prosperarla meglio degli altri servir debbano i mezzi che da prima la nutrirono in culla; e quello che si propone può per lo meno sostenere il confronto delle tabelle di cui ci si narra che appendevansi e tenevansi esposte nel tempio di Esculapio. Più; non ha forse paese in cui non si conoscano certi rimedii e certi metodi di cura che natural-

mente senza il suffragio dell' esperienza non si manterrebbero in credito; mentre d'altra parte sono ignoti altrove e rimangonsi esclusivamente ristretti entro quel paese. Or di essi è manifesto che gioverebbe e converrebbe raccoglierli e spargerne e allargarne la notizia. Ma chi scrive teme che questi sieno sogni poco diversi da quelli del filantropo S^t^. Pierre. Ei non pertanto se gli lascia cader dalla penna in uno scritto in cui nel render conto delle riflessioni altrui ha osato con qualche intemperanza d' introdurre le proprie. A lui premerebbe, vedendo che *fugit interea*, *fugit irreparabile tempus* di provarsi almeno a saldare in qualche parte i debiti che avrà senza dubbio contratti nell' esercizio di un' arte sì esposta agli abbaglj e agl' infortunii coll' aprir, se non altro, qualche non del tutto inutile suggerimento.

MEMORIE

DELLA CLASSE

DI FISICA E MATEMATICA

ELEMENTI

Di Trigonometria Sferoidica

DI BARNABA ORIANI

PARTE SECONDA

Presentata in novembre 1806

65. PRIMA di passare alla soluzione degli altri problemi della trigonometria sferoidica gioverà richiamare le equazioni fondamentali, riducendole alla forma più comoda per l' uso che ne dovremo fare. L' equazione (16), cioè

$$sen\,\theta = \frac{cos\,\lambda'}{cos\,\varphi'}\,sen\,\zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (XIV)$$

è già per se stessa semplicissima.

66. Dividendo per $1+Q'$ tutti i termini dell'equazione (15), e facendo (§ 36)

$$\alpha_0=\frac{Q'}{1+Q'};\ \alpha_1=\frac{-R'}{1+Q'};\ \alpha_2=\frac{+R''}{1+Q'};\ \alpha_3=\frac{-R'''}{1+Q'};\ \text{ec.}$$

posto in oltre per qualunque numero i

$$\frac{1}{2}\Big[sen\ 2iV-sen\ 2i\ V'\Big]=sen\ i\,(V-V')\cos i\,(V+V')=[i]$$

la stessa equazione diventerà

$$P=V-V'+\alpha_0.P+2\alpha_1.[1]+2\alpha_2.[2]+2\alpha_3.[3]+\text{ec.}\ldots.\ (XV)$$

ed è facile da vedere colle successive sostituzioni dei valori di Q', Q'', Q''', ec. e di R', R'', R''', ec. che si ha

$$\alpha_0.(1+Q')=Q'=\left(\frac{\Delta}{2}\cos p'\right)^2-\frac{3}{2^2}\left(\frac{\Delta}{2}\cos p'\right)^4+\frac{3^2.5}{2^2.3^2}\left(\frac{\Delta}{2}\cos p'\right)^6$$
$$-\frac{3^2.5^2.7}{2^2.3^2.4^2}\left(\frac{\Delta}{2}\cos p'\right)^8+\text{ec.}$$

$$\alpha_1.(1+Q')=-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{2}\cos p'\right)^2.\left[1-\frac{1}{3}.\frac{3}{1}\left(\frac{\Delta}{2}\cos p'\right)^2+\frac{1.3}{3.4}.\frac{3.5}{1.2}\left(\frac{\Delta}{2}\cos p'\right)^4\right.$$
$$\left.-\frac{1.3.5}{3.4.5}.\frac{3.5.7}{1.2.3}\left(\frac{\Delta}{2}\cos p'\right)^6+\text{ec.}\right]$$

$$\alpha_2.(1+Q')=-\frac{1}{2}.\frac{1.1}{2.4}\left(\frac{\Delta}{2}\cos p'\right)^4.\left[1-\frac{3}{5}.\frac{5}{1}\left(\frac{\Delta}{2}\cos p'\right)^2+\frac{3.5}{5.6}.\frac{5.7}{1.2}\left(\frac{\Delta}{2}\cos p'\right)^4\right.$$
$$\left.-\frac{3.5.7}{5.6.7}.\frac{5.7.9}{1.2.3}\left(\frac{\Delta}{2}\cos p'\right)^6+\text{ec}\right]$$

e generalmente

$$a_m \cdot (1+Q') = -\frac{1}{m} \cdot \frac{1.1.3.5....2m-3}{2.4.6.8....2m} \cdot \left(\frac{\Delta}{2}\cos p'\right)^{2m} \left[1 - \frac{2m-1}{2m+1} \cdot \frac{2m+1}{1} \cdot \left(\frac{\Delta}{2}\cos p'\right)^2 \right.$$

$$+ \frac{2m-1}{2m+1} \cdot \frac{2m+1}{2m+2} \cdot \frac{2m+1}{1} \cdot \frac{2m+3}{2} \left(\frac{\Delta}{2}\cos p'\right)^4$$

$$- \frac{2m-1}{2m+1} \cdot \frac{2m+1}{2m+2} \cdot \frac{2m+3}{2m+3} \cdot \frac{2m+1}{1} \cdot \frac{2m+3}{2} \cdot \frac{2m+5}{3} \left(\frac{\Delta}{2}\cos p'\right)^6$$

$$\left. + \text{ec.} \right]$$

Negligentando la decima e le più alte potenze dell'eccentricità, sarà

$$\frac{1}{1+Q'} = 1 - \left(\frac{\Delta}{2}\cos p'\right)^2 + \frac{7}{2^2}\left(\frac{\Delta}{2}\cos p'\right)^4 - \frac{3.5}{2^4}\left(\frac{\Delta}{2}\cos p'\right)^6 + \frac{3.193}{2^6}\left(\frac{\Delta}{2}\cos p'\right)^8$$

d' onde ne viene

$$a_0 = \left(\frac{\Delta}{2}\cos p'\right)^2 - \frac{7}{2^2}\left(\frac{\Delta}{2}\cos p'\right)^4 + \frac{3.5}{2^4}\left(\frac{\Delta}{2}\cos p'\right)^6 - \frac{3.193}{2^6}\left(\frac{\Delta}{2}\cos p'\right)^8$$

$$a_1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{2}\cos p'\right)^2 + \left(\frac{\Delta}{2}\cos p'\right)^4 - \frac{37}{2^4}\left(\frac{\Delta}{2}\cos p'\right)^6 + \frac{47}{2^3}\left(\frac{\Delta}{2}\cos p'\right)^8$$

$$a_2 = -\frac{1}{2^4}\left(\frac{\Delta}{2}\cos p'\right)^4 + \frac{1}{2^2}\left(\frac{\Delta}{2}\cos p'\right)^6 - \frac{27}{2^5}\left(\frac{\Delta}{2}\cos p'\right)^8$$

$$a_3 = -\frac{1}{3.2^4}\left(\frac{\Delta}{2}\cos p'\right)^6 + \frac{1}{2^5}\left(\frac{\Delta}{2}\cos p'\right)^8$$

$$a_4 = -\frac{5}{2^9}\left(\frac{\Delta}{2}\cos p'\right)^8$$

67. L' equazione (16), che dà la differenza in longitudine (§ 37), si può ridurre alla forma seguente

$$\pi = Z - Z' - \beta_0 \cdot (V - V') - 2\beta_1 \cdot [1] - 2\beta_2 \cdot [2] - 2\beta_3 \cdot [3] - \text{ec.} \ldots\ldots\ldots (XVI)$$

qualora si ponga

$$\beta_0 = M \operatorname{sen} p'; \beta_1 = -N' \operatorname{sen} p'; \beta_2 = +N'' \operatorname{sen} p'; \beta_3 = -N''' \operatorname{sen} p'; \text{ec.}$$

vale a dire

$$\beta_0 = \operatorname{sen} p' \cdot \left[L - 2L' \left(\frac{\cos p'}{2}\right)^2 + \frac{3.4}{1.2} L'' \left(\frac{\cos p'}{2}\right)^4 - \frac{4.5.6}{1.2.3} L''' \left(\frac{\cos p'}{2}\right)^6 + \text{ec} \right]$$

$$\beta_1 = \operatorname{sen} p' \left(\frac{\cos p'}{2}\right)^2 \cdot \left[L' - 4L'' \left(\frac{\cos p'}{2}\right)^2 + \frac{5.6}{1.2} L''' \left(\frac{\cos p'}{2}\right)^4 - \frac{6.7.8}{1.2.3} L^{IV} \left(\frac{\cos p'}{2}\right)^6 + \text{ec.} \right]$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2} \operatorname{sen} p' \left(\frac{\cos p'}{2}\right)^4 \cdot \left[L'' - 6L''' \left(\frac{\cos p'}{2}\right)^2 + \frac{7.8}{1.2} L^{IV} \left(\frac{\cos p'}{2}\right)^4 - \frac{8.9.10}{1.2.3} L^{V} \left(\frac{\cos p'}{2}\right)^6 + \text{ec} \right]$$

ed in generale

$$\beta_m = \frac{1}{m} \operatorname{sen} p' \left(\frac{\cos p'}{2}\right)^{2m} \cdot \left[L^{(m)} - \frac{2m+2}{1} L^{(m+1)} \cdot \left(\frac{\cos p'}{2}\right)^2 + \frac{2m+3}{1} \cdot \frac{2m+4}{2} L^{(m+2)} \cdot \left(\frac{\cos p'}{2}\right)^4 - \frac{2m+4}{1} \cdot \frac{2m+5}{2} \cdot \frac{2m+6}{3} L^{(m+3)} \cdot \left(\frac{\cos p'}{2}\right)^6 + \text{ec.} \right]$$

e le quantità L, L', L''..... $L^{(n)}$ saranno

$$L = \frac{1}{2} e^2 + \frac{1.1}{2.4} e^4 + \frac{1.1.3}{2.4.6} e^6 + \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} e^8 + \text{ec.}$$

$$L' = \frac{1.1}{2.4} e^4 + 2\frac{1.1.3}{2.4.6} e^6 + 3\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} e^8 + \text{ec.}$$

$$L'' = \frac{1.1.3}{2.4.6} e^6 + 3\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} e^8 + \text{ec.}$$

$$\vdots$$

$$L^{(n)} = \frac{1.1.3.5...2n-1}{2.4.6.8...2(n+1)} \cdot e^{2(n+1)} \cdot \left[1 + \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{2n+1}{2} \cdot e^2 \right.$$

$$+ \frac{n+1}{n+3} \cdot \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{2n+3}{4} \cdot e^4$$

$$+ \frac{n+1}{n+4} \cdot \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{2n+3}{4} \cdot \frac{2n+5}{6} \cdot e^6$$

$$\left. + \text{ec.} \right] .$$

ovvero ancora

$$L^{(n)} = \frac{1.1.3.5....2n-1}{2.4.6.8....2(n+1)} \cdot \Delta^{2(n+1)} \cdot \left[1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot \Delta^2 \right.$$

$$+ \frac{3.5}{2.4} \cdot \frac{n+1}{n+3} \cdot \Delta^4$$

$$- \frac{3.5.7}{2.4.6} \cdot \frac{n+1}{n+4} \cdot \Delta^6$$

$$\left. + \text{ec.} \right]$$

Ommettendo la decima e le più alte potenze dell' eccentricità, avremo

$$\beta_0 = \frac{1}{2} sen p' \left[e^2 + \frac{1}{2^3} \cdot e^4 (1 + sen p'^2) + \frac{1}{2^6} \cdot e^6 (8 sen p'^2 + 3 cos p'^4) \right.$$

$$\left. + \frac{5}{2^{10}} \cdot e^8 (1 + sen p'^2)(8 sen p'^2 + 5 cos p'^4) \right]$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2^5} sen p' cos p'^2 \left[e^4 + \frac{1}{2} \cdot e^6 (1 + sen p'^2) + \frac{15}{2^8} \cdot e^8 (16 sen p'^2 + 5 cos p'^4) \right]$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2^5}\, sen\, p'\, cos\, p'^4 \left[e^5 + \frac{15}{2^4} \cdot e^8 \left(1 + sen\, p'^2\right) \right]$$

$$\beta_3 = \frac{5}{3.2^{13}} \cdot e^8\, sen\, p'\, cos\, p'^6$$

68. Egli è pur facile da vedere, che le due formole (§§ 16, 17) esprimenti l'arco del meridiano $= T$ compreso fra le due latitudini φ, λ, si ridurranno alla seguente

$$\frac{T}{a(1-e^2)} = \frac{T}{b(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} = (1+a_0)(\varphi-\lambda) - 2a_1.(1) + 2a_2.(2) - 2a_3.(3) + \text{ec.}\ldots. \text{(XI)}$$

nella quale si ha per qualunque numero i

$(i) = sen\, i\,(\varphi-\lambda)\, cos\, i\,(\varphi+\lambda)$

ed i coefficienti a_0; a_1; a_2;..... a_m saranno

$$a_0 = 1 + \frac{3}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \frac{3.5}{1.2}\cdot\frac{1.3}{1.2}\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^4 + \frac{3\,5.7}{1.2.3}\cdot\frac{1.3.5}{1.2.3}\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^6 + \text{ec.}$$

$$a_1 = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^2\cdot\left[1 + \frac{5}{3}\cdot\frac{3}{1}\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \frac{5.7}{3.4}\cdot\frac{3.5}{1.2}\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^4 + \frac{5.7.9}{3.4.5}\cdot\frac{3.5.7}{1.2.3}\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^6 + \text{ec.}\right]$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3.5}{2.4}\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^4\cdot\left[1 + \frac{7}{5}\cdot\frac{5}{1}\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \frac{7.9}{5.6}\cdot\frac{5.7}{1.2}\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^4 + \frac{7.9.11}{5.6.7}\cdot\frac{5.7.9}{1.2.3}\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^6 + \text{ec.}\right]$$

$$\vdots$$

$$a_m = \frac{1}{m}\cdot\frac{3.5.7....2m+1}{2.4.6....2m}\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^{2m}\cdot\left[1 + \frac{2m+3}{2m+1}\cdot\frac{2m+1}{1}\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \frac{2m+3}{2m+1}\cdot\frac{2m+5}{2m+2}\cdot\frac{2m+1}{1}\cdot\frac{2m+3}{2}\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^4 + \frac{2m+3}{2m+1}\cdot\frac{2m+5}{2m+2}\cdot\frac{2m+7}{2m+3}\cdot\frac{2m+1}{1}\cdot\frac{2m+3}{2}\cdot\frac{2m+5}{3}\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^6 + \text{ec.}\right]$$

69. Similmente, posto $\psi = 90^\circ - v$, la formola esprimente il valore di P nel caso di $\zeta = 90^\circ$ diventa (§ 28)

$$P = (1 + D^2)\left[A_0 . \psi + A_1 . sen\, 2\psi + A_2 . sen\, 4\psi + A_3 . sen\, 6\psi + \text{ec.} \right]$$

nella quale si ha

$$1 + D^2 = \frac{1}{1 - e^2\, sen\, \lambda^2}\,;\ \text{ossia}\ D^2 = \frac{e^2\, sen\, \lambda^2}{1 - e^2\, sen\, \lambda^2}$$

ed i coefficienti A_0, A_1, A_2..... A_m saranno

$$A_0 = 1 - \frac{3}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \frac{3.5}{1.2}\cdot\frac{1.3}{1.2}\cdot\left(\frac{D}{2}\right)^4 - \frac{3.5.7}{1.2.3}\cdot\frac{1.3.5}{1.2.3}\cdot\left(\frac{D}{2}\right)^6 + \text{ec.}$$

$$A_1 = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{D}{2}\right)^2\cdot\left[1 - \frac{5}{3}\cdot\frac{3}{1}\cdot\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \frac{5.7}{3.4}\cdot\frac{3.5}{1.2}\cdot\left(\frac{D}{2}\right)^4 - \frac{5.7.9}{3.4.5}\cdot\frac{3.5.7}{1.2.3}\cdot\left(\frac{D}{2}\right)^6 + \text{ec.}\right]$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3.5}{2.4}\cdot\left(\frac{D}{2}\right)^4\cdot\left[1 - \frac{7}{5}\cdot\frac{5}{1}\cdot\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \frac{7.9}{5.6}\cdot\frac{5.7}{1.2}\cdot\left(\frac{D}{2}\right)^4 - \frac{7.9.11}{5.6.7}\cdot\frac{5.7.9}{1.2.3}\cdot\left(\frac{D}{2}\right)^6 + \text{ec.}\right]$$

$$\vdots$$

$$A_m = \frac{1}{m}\cdot\frac{3.5.7....2m+1}{2.4.6....2m}\cdot\left(\frac{D}{2}\right)^{2m}\cdot\left[1 - \frac{2m+3}{2m+1}\cdot\frac{2m+1}{1}\cdot\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \frac{2m+3}{2m+1}\cdot\frac{2m+5}{2m+2}\cdot\frac{2m+1}{1}\cdot\frac{2m+3}{2}\cdot\left(\frac{D}{2}\right)^4 - \frac{2m+3}{2m+1}\cdot\frac{2m+5}{2m+2}\cdot\frac{2m+7}{2m+3}\cdot\frac{2m+1}{1}\cdot\frac{2m+3}{2}\cdot\frac{2m+5}{3}\cdot\left(\frac{D}{2}\right)^6 + \text{ec.}\right]$$

Dividendo per $(1 + D^2) . A_0$ tutti i termini della formola precedente, sarà

$$\frac{P}{(1 + D^2)\, A_0} = P - \frac{(e^2\, sen\, \lambda^2 + A_0 - 1)}{A_0} . P\,.$$ Onde facendo

$$C_0 = \frac{e^2 \operatorname{sen} \lambda^2 + A_0 - 1}{A_0}; \quad C_1 = \frac{A_1}{A_0}; \quad C_2 = \frac{A_2}{A_0}; \text{ ec.}$$

si avrà l' equazione

$$P = \psi + C_0 . P + C_1 . \operatorname{sen} 2\psi + C_2 . \operatorname{sen} 4\psi + C_3 . \operatorname{sen} 6\psi + \text{ec.} \ldots . \text{(XII)}$$

e nel caso che si negligentino la decima e le più alte potenze dell' eccentricità, essendo

$$\frac{1}{A_0} = 1 + 3 \left(\frac{e}{2} \operatorname{sen} \lambda\right)^2 + \frac{3.13}{2^2} \left(\frac{e}{2} \operatorname{sen} \lambda\right)^4 + \frac{133}{2^2} \left(\frac{e}{2} \operatorname{sen} \lambda\right)^6 + \frac{3.11.227}{2^6} \left(\frac{e}{2} \operatorname{sen} \lambda\right)^8$$

ne verrà

$$C_0 = \left(\frac{e}{2} \operatorname{sen} \lambda\right)^2 + \frac{9}{2^2} \left(\frac{e}{2} \operatorname{sen} \lambda\right)^4 + \frac{23}{2^2} \left(\frac{e}{2} \operatorname{sen} \lambda\right)^6 + \frac{1021}{2^6} \left(\frac{e}{2} \operatorname{sen} \lambda\right)^8$$

$$C_1 = \frac{3}{2} \left(\frac{e}{2} \operatorname{sen} \lambda\right)^2 + 3 \left(\frac{e}{2} \operatorname{sen} \lambda\right)^4 - \frac{3.37}{2^4} \left(\frac{e}{2} \operatorname{sen} \lambda\right)^6 - 6.43 \left(\frac{e}{2} \operatorname{sen} \lambda\right)^8$$

$$C_2 = \frac{3.5}{2^4} \left(\frac{e}{2} \operatorname{sen} \lambda\right)^4 + \frac{3.5}{2^2} \left(\frac{e}{2} \operatorname{sen} \lambda\right)^6 - \frac{9.43}{2^5} \left(\frac{e}{2} \operatorname{sen} \lambda\right)^8$$

$$C_3 = \frac{5.7}{3.2^4} \left(\frac{e}{2} \operatorname{sen} \lambda\right)^6 + \frac{5.7}{2^4} \left(\frac{e}{2} \operatorname{sen} \lambda\right)^8$$

$$C_4 = \frac{5.7.9}{2^7} \left(\frac{e}{2} \operatorname{sen} \lambda\right)^8$$

70. Finalmente la formola esprimente la differenza in longitudine nello stesso caso di $\zeta = 90^\circ$, posto come sopra $\psi = 90^\circ - v$, sarà (§ 30)

$$\varepsilon = 90^\circ - z - B_0 . \psi - B_1 . \operatorname{sen} 2\psi - B_2 . \operatorname{sen} 4\psi - B_3 . \operatorname{sen} 6\psi - \text{ec.} \ldots . \text{(XIII)}$$

e si avrà

$$B_0 = \cos\lambda \left[K + \frac{1}{2} K' \operatorname{sen}\lambda^2 + \frac{3}{2}.\frac{1.2}{2.4} K'' \operatorname{sen}\lambda^4 + \frac{3.5}{2.3}.\frac{1.2.3}{2.4.6} K''' \operatorname{sen}\lambda^6 + \text{ec.} \right]$$

$$B_1 = \cos\lambda \left(\frac{\operatorname{sen}\lambda}{2}\right)^2 . \left[K' + \frac{2}{2} K'' \operatorname{sen}\lambda^2 + \frac{5}{4}.\frac{2.3}{2.4} K''' \operatorname{sen}\lambda^4 + \frac{5.7}{4.5}.\frac{2.3.4}{2.4.6} K^{IV} \operatorname{sen}\lambda^6 + \text{ec.} \right]$$

$$B_2 = \frac{1}{2} \cos\lambda \left(\frac{\operatorname{sen}\lambda}{2}\right)^4 . \left[K'' + \frac{3}{2} K''' \operatorname{sen}\lambda^2 + \frac{7}{6}.\frac{3.4}{2.4} K^{IV} \operatorname{sen}\lambda^4 + \frac{7.9}{6.7}.\frac{3.4.5}{2.4.6} K^{V} \operatorname{sen}\lambda^6 + \text{ec.} \right]$$

e generalmente

$$B_m = \frac{1}{m} \cos\lambda \left(\frac{\operatorname{sen}\lambda}{2}\right)^{2m} . \left[K^{(m)} + \frac{m+1}{2} . K^{(m+1)} \operatorname{sen}\lambda^2 \right.$$

$$+ \frac{2m+3}{2m+2} . \frac{m+1}{2} . \frac{m+2}{4} . K^{(m+2)} \operatorname{sen}\lambda^4$$

$$+ \frac{2m+3}{2m+2} . \frac{2m+5}{2m+3} . \frac{m+1}{2} . \frac{m+2}{4} . \frac{m+3}{6} . K^{(m+3)} \operatorname{sen}\lambda^6$$

$$\left. + \text{ec.} \right]$$

le quantità $K, K', K'' \ldots\ldots K^{(n)}$ si determineranno nella seguente maniera

$$K = \frac{1}{2}\Delta^2 - \frac{1.3}{2.4}\Delta^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\Delta^6 - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\Delta^8 + \text{ec.}$$

$$K' = \frac{1.3}{2.4}\Delta^4 - 2\frac{1.3.5}{2.4.6}\Delta^6 + 3\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\Delta^8 + \text{ec.}$$

$$K'' = \frac{1.3.5}{2.4.6}\Delta^6 - 3\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\Delta^8 + \text{ec.}$$

$$\vdots$$

$$K^{(n)} = \frac{1.3.5.7....2n+1}{2.4.6.8....2(n+1)} \cdot \Delta^{2(n+1)} \cdot \left[1 - \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{2n+3}{2} \cdot \Delta^2 \right.$$

$$+ \frac{n+1}{n+3} \cdot \frac{2n+3}{2} \cdot \frac{2n+5}{4} \cdot \Delta^4$$

$$- \frac{n+1}{n+4} \cdot \frac{2n+3}{2} \cdot \frac{2n+5}{4} \cdot \frac{2n+7}{6} \cdot \Delta^6$$

$$\left. + \text{ec.} \right]$$

oppure ancora

$$K^{(n)} = \frac{1.3.5.7....2n+1}{2.4.6.8....2(n+1)} \cdot e^{2(n+1)} \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot e^2 \right.$$

$$+ \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{n+1}{n+3} \cdot e^4 .$$

$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{n+1}{n+4} \cdot e^6$$

$$\left. + \text{ec.} \right]$$

71. Nel caso di $\zeta = 90^\circ$ si possono usare ancora le equazioni precedenti (XV) e (XVI). Converrà in questo caso prendere P e ϖ negativamente (§ 21), e porre in seguito $V = 90^\circ - \Psi$, ne verrà quindi $V' = 90^\circ$; $Z' = 90^\circ$, e $tang\, Z = tang(Z) = cos\, \lambda' \, cot\, \Psi$. Oppure, ciò che torna allo stesso, basterà fare semplicemente $V = 90^\circ + \Psi$, poichè si avrà egualmente $Z' = 90^\circ$; $Z = 180^\circ - (Z)$; e sarà

$[1] = -\frac{1}{2}\, sen\, 2\Psi$; $[2] = \frac{1}{2}\, sen\, 4\Psi$; $[3] = -\frac{1}{2}\, sen\, 6\Psi$; ec.

Laonde l' equazione (XV) diventerà

$$P = \Psi + \alpha_0 . P - \alpha_1 . sen\, 2\Psi + \alpha_2 . sen\, 4\Psi - \alpha_3 . sen\, 6\Psi + \text{ec.}$$

nella quale si avrà (§ 66)

$$cos\, \Psi = \frac{sen\, \Phi'}{sen\, \lambda'}$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2^2} . \Delta^2 sen\, \lambda'^2 - \frac{7}{2^6} . \Delta^4 sen\, \lambda'^4 + \frac{15}{2^8} . \Delta^6 sen\, \lambda'^6 + \text{ec.}$$

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2^3} . \Delta^2 sen\, \lambda'^2 + \frac{1}{2^4} . \Delta^4 sen\, \lambda'^4 - \frac{37}{2^{10}} . \Delta^6 sen\, \lambda'^6 - \text{ec.}$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2^5} . \Delta^4 sen\, \lambda'^4 + \frac{1}{2^8} . \Delta^6 sen\, \lambda'^6 - \text{ec.}$$

$$\alpha_3 = -\frac{1}{3.2^{10}} . \Delta^6 sen\, \lambda'^6 + \text{ec.}$$

ec.

e l' equazione (XVI) sarà

$$\varpi = 90^\circ - (Z) - \beta_0 . \Psi + \beta_1 . sen\, 2\Psi - \beta_2 . sen\, 4\Psi + \beta_3 . sen\, 6\Psi - \text{ec.}$$

in cui è Ψ come sopra, e $tang(Z) = cos\, \lambda' cot\, \Psi$; ed i coefficienti risulteranno (§ 67)

$$\beta_0 = \left[\frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{2^4}(1 + cos\, \lambda'^2) + \frac{e^6}{2^7}(8\, cos\, \lambda'^2 + 3\, sen\, \lambda'^4) + \text{ec.}\right] cos\, \lambda'$$

$$\beta_1 = \left[\frac{e^4}{2^5} + \frac{e^6}{2^6}(1 + cos\, \lambda'^2) + \text{ec.}\right] sen\, \lambda'^2\, cos\, \lambda'$$

$$\beta_2 = \frac{e^6}{2^9}\, sen\, \lambda'^4\, cos\, \lambda' + \text{ec.}$$

ec.

Essendo poi (§ 33)

$$sen\ \varphi' = \frac{sen\ \varphi}{\sqrt{(1 + \Delta^2\ cos\ \varphi^2)}} = \frac{sen\ \varphi\ \sqrt{(1 - e^2)}}{\sqrt{(1 - e^2\ sen\ \varphi^2)}}$$

$$sen\ \lambda' = \frac{sen\ \lambda}{\sqrt{(1 + \Delta^2\ cos\ \lambda^2)}} = \frac{sen\ \lambda\ .\ \sqrt{(1 - e^2)}}{\sqrt{(1 - e^2\ sen\ \lambda^2)}}$$

ne verrà

$$sen\ V = cos\ \Psi = \frac{sen\ \varphi'}{sen\ \lambda'} = \frac{sen\ \varphi}{sen\ \lambda} \cdot \frac{\sqrt{(1 - e^2\ sen\ \lambda^2)}}{\sqrt{(1 - e^2\ sen\ \varphi^2)}}$$

vale a dire

$$cos\ \Psi = \frac{cos\ \psi\ \sqrt{(1 - e^2\ sen\ \lambda^2)}}{\sqrt{(1 - e^2\ sen\ \lambda^2\ cos\ \psi^2)}}\ ;\ sen\ \Psi = \frac{sen\ \psi}{\sqrt{(1 - e^2\ sen\ \lambda^2\ cos\ \psi^2)}}$$

e per conseguenza sarà $tang\ \Psi = \frac{tang\ \psi}{\sqrt{(1 - e^2\ sen\ \lambda^2)}}$.

Posto dunque

$$h = \left[\frac{e\ sen\ \lambda}{1 + \sqrt{(1 - e^2\ sen\ \lambda^2)}}\right]^2 = \left[\frac{\Delta\ sen\ \lambda}{\sqrt{(1 - \Delta^2)} + \sqrt{(1 + \Delta^2\ cos\ \lambda^2)}}\right]^2$$

avremo (§ 33)

$$\Psi = \psi + h\ sen\ 2\ \psi + \tfrac{1}{2}\ h^2\ sen\ 4\ \psi + \tfrac{1}{3}\ h^3\ sen\ 6\ \psi + \text{ec.}$$

e reciprocamente

$$\psi = \Psi - h\ sen\ 2\ \Psi + \tfrac{1}{2}\ h^2\ sen\ 4\ \Psi - \tfrac{1}{3}\ h^3\ sen\ 6\ \Psi + \text{ec.}$$

Avendosi inoltre $cos\ \lambda' = \frac{cos\ \lambda\ \sqrt{(1 + \Delta^2)}}{\sqrt{(1 + \Delta^2\ cos\ \lambda^2)}} = \frac{cos\ \lambda}{\sqrt{(1 - e^2\ sen\ \lambda^2)}}$,

ne segue $tang\ (Z) = cos\ \lambda'\ cot\ \Psi = cos\ \lambda\ cot\ \psi = tang\ z$.

Laonde l' angolo z dell' equazione (XIII) sarà lo stesso che l' angolo (Z) dell' equazione precedente. Ognuno poi vede dai trovati rapporti fra le quantità λ', φ', Ψ

sulla sfera inscritta e le corrispondenti quantità λ, ϕ, ψ sullo sferoide elittico, che qualunque formola espressa colle prime quantità si potrà trasformare in un' altra espressa colle seconde e reciprocamente.

72. Vediamo presentemente l' uso delle equazioni fondamentali nella risoluzione degli altri problemi della trigonometria sferoidica.

Problema III.

Dati nel triangolo elittico i tre elementi λ, ϕ, P trovare l' angolo ζ

Soluzione I.

Alle date latitudini λ, ϕ si cerchino le corrispondenti latitudini λ', ϕ' sulla sfera inscritta (§§ 32, 33), e pongasi, per brevità, nell'equazione (XV)

$$\tau = \alpha_0 . P + 2\alpha_1 . [1] + 2\alpha_2 . [2] + 2\alpha_3 . [3] + \text{ec.}$$

la stessa equazione diventerà (1)

$$P - \tau = V - V'$$

Ora essendo

$$sen\, V = \frac{sen\, \Phi'}{cos\, p'}\,;\; cos\, V = \frac{\sqrt{(cos\, p'^2 - sen\, \Phi'^2}}{cos\, p'}\,;\; sen\, V' = \frac{sen\, \lambda'}{cos\, p'}\,;\; cos\, V' = \frac{cos\, \zeta\, cos\, \lambda'}{cos\, p'},$$

(1) In questo e ne' seguenti problemi noi supporremo che tanto P quanto τ sieno espressi in minuti secondi, vale a dire, che P, τ s' intenderanno moltiplicati in $\frac{180}{\pi} . 60'' = \frac{1}{sen\, 1''}$.

ne risulterà

$$scn(P-\tau)=scn(V-V')=\frac{\cos\zeta\,sen\Phi'\cos\lambda'-sen\lambda'\sqrt{(\cos p'^2-sen\Phi'^2)}}{\cos p'^2}$$

$$\cos(P-\tau)=\cos(V-V')=\frac{sen\Phi'\,sen\lambda'+\cos\zeta\cos\lambda'\sqrt{(\cos p'^2-sen\Phi'^2)}}{\cos p'^2}$$

Eliminando i radicali, otterremo l' equazione

$$\cos\zeta\cos\lambda' sen(P-\tau)+sen\lambda'\cos(P-\tau)=\frac{sen\,\Phi'}{sen\,p'^2}(sen\,\lambda'^2+\cos\zeta^2\cos\lambda'^2)=sen\Phi'$$

da cui si ricava

$$\cos\zeta=\frac{sen\,\Phi'-sen\,\lambda'\cos(P-\tau)}{\cos\lambda'\,sen(P-\tau)}$$

Facciasi ora $P-\tau=\varrho$, e sia in oltre $\tau=\Phi\varrho$, cioè τ eguale ad una funzione di ϱ, avremo l'equazione

$$o=P-\varrho-\Phi\varrho$$

da cui mediante il teorema citato (§§ 43, 44) ricaveremo

$$\varrho=P-\Psi P+\frac{d.(\Phi\varrho)^2}{2\,d\varrho}-\frac{d^2.(\Phi\varrho)^3}{2.3\,d\varrho^2}+\text{ec.}$$

I termini $\frac{d.(\Phi\varrho)^2}{d\varrho}$, $\frac{d^2.(\Phi\varrho)^3}{d\varrho^2}$, ec, si otterranno facilmente, poichè essendo α_0; α_1; α_2; ec. [1], [2], [3], ec. funzioni della variabile ζ e delle costanti λ', Φ', si avrà in generale

$$\frac{d.(\Phi\varrho)^m}{d\varrho}=2m(\Phi\varrho)^{m-1}.\frac{d\zeta}{d\varrho}\left(\frac{1}{2}P.\frac{d\alpha_0}{d\zeta}+[1].\frac{d\alpha_1}{d\zeta}+[2].\frac{d\alpha_2}{d\zeta}+\text{ec.}\right.$$

$$\left.+\alpha_1.\frac{d[1]}{d\zeta}+\alpha_2.\frac{d[2]}{d\zeta}+\text{ec.}\right)$$

Ma dall' equazione $cos\,\zeta = \frac{sen\,\Phi' - sen\,\lambda'\,cos\,\varrho}{cos\,\lambda'\,sen\,\varrho}$ si ricava

$$\frac{d\,\zeta}{d\,\varrho} = \frac{cos\,\zeta\,cot\,\varrho - tang\,\lambda'}{sen\,\zeta}\,:$$

Dunque ancora qualunque termine $\frac{d^n\,.\,(\Phi\,\varrho)^{n}}{d\,\varrho^n}$ sarà funzione di ζ, ϱ e delle costanti λ', Φ', la quale si potrà sempre determinare colla semplice differenziazione. Prendendo pertanto un angolo H tale che sia

$$cos\,H = \frac{sen\,\Phi' - sen\,\lambda'\,cos\,P}{cos\,\lambda'\,sen\,P}$$

è evidente che dopo le differenziazioni dovrà porsi P in luogo di ϱ, e H in luogo di ζ. Dal valore poi di ϱ se ne dedurrà l' angolo cercato ζ mediante l' equazione

$$cos\,\zeta = \frac{sen\,\Phi' - sen\,\lambda'\,cos\,\varrho}{cos\,\lambda'\,sen\,\varrho}$$

73. Sia, per esempio, da trovarsi l' angolo ζ negligentando la sesta e le più alte potenze dell' eccentricità: si avrà (§ 66)

$$\tau = \Phi\,\varrho = \frac{\Delta^2}{2^2}cosp'^2(P-[1]) - \frac{\Delta^4}{2^7}cosp'^4(14P-16[1]+[2])$$

$$(\Phi\,\varrho)^2 = \frac{\Delta^4}{2^4}cosp'^4(P-[1])^2$$

$$\frac{d\,(\Phi\,\varrho)^2}{2\,d\,\varrho} = \frac{\Delta^4}{2^4}cosp'^3(P-[1]).\frac{d\,\zeta}{d\,\varrho}.\left(2(P-[1]).\frac{d\,.\,cosp'}{d\,\zeta} - cosp'.\frac{d\,.\,[1]}{d\,\zeta}\right)$$

Ora essendo

$sen\, p' = sen\, \zeta \cos \lambda'$, sarà $\frac{d.sen\, p'}{d\zeta} = \cos \zeta \cos \lambda' = sen\, p' \cot \zeta$;

quindi $\frac{d.\cos p'}{d\zeta} = -tang\, p' \frac{d.sen\, p'}{d\zeta} = -sen\, p' tang p' \cot \zeta$

Inoltre $\frac{d.[1]}{d\zeta} = \frac{dV}{d\zeta} \cos 2V - \frac{dV'}{d\zeta} \cos 2V'$; e siccome è

$sen\, V = \frac{sen\, \Phi'}{\cos p'}$, si avrà

$$\frac{dV}{d\zeta} \cos V = \frac{d.sen\, V}{d\zeta} = -\frac{sen\, \Phi'}{\cos p'^2} \cdot \frac{d.\cos p'}{d\zeta} = sen\, V\, tang\, p'^2 \cot \zeta$$

e conseguentemente sarà

$$\frac{dV}{d\zeta} = tang\, V tang\, p'^2 \cot \zeta$$

Si troverà nella stessa maniera

$$\frac{dV'}{d\zeta} = tang\, V' \, tang\, p'^2 \cot \zeta$$

Onde ne segue

$$2(P-[1]) \frac{d.\cos p'}{d\zeta} - \cos p' \frac{d.[1]}{d\zeta}$$

$$= -sen p' tang p' \cot \zeta \left[2(P-[1]) + t\, V \cos 2V - t\, V' \cos 2V' \right]$$

$$= -sen p' tang p' \cot \zeta \left[2P - [1] - sen\, V^2 tang\, V + sen\, V'^2 tang\, V' \right]$$

e sopra (§ 72) abbiamo trovato $\frac{d\zeta}{d\varrho} = \frac{\cos \zeta \cot \varrho - tang\, \lambda'}{sen\, \zeta}$.

Laonde posto H in vece di ζ, e P in vece di ϱ, e fat-

to, per brevità, $A = \frac{d\,II}{d\,P}$, avremo

$$\frac{d.(\Phi\varrho)^2}{2\,d\,\varrho} = -\frac{\Delta^4}{2^4}.A\,sen\,p'^2\,cos\,p'^2\,cot\,II.(P-[1])\Big[2\,P-[1]-sen\,V'^2\,tang\,V + sen\,V'^2\,tang\,V'\Big]$$

Dunque il calcolo per trovare l' angolo ζ si potrà ordinare nella seguente maniera.

1) $cos\,II = \frac{sen\,\Phi' - sen\,\lambda'\,cos\,P}{cos\,\lambda'\,sen\,P}$

2) $A = \frac{cos\,H\,cot\,P - tang\,\lambda'}{sen\,II}$

3) $sen\,p' = sen\,II\,cos\,\lambda'$

4) $sen\,V' = \frac{sen\,\lambda'}{cos\,p'}$

5) $sen\,V = \frac{sen\,\Phi'}{cos\,p'}$; oppure $V = P + V'$

6) $\varrho = P - \frac{\Delta^2}{2^2}cos\,p'^2.(P-[1]) + \frac{\Delta^4}{2^7}cos\,p'^4(14P-16[1]+[2])$
$-\frac{\Delta^4}{2^4}.A\,sen\,p'^2\,cos\,p'^2\,cot\,II.(P-[1])\Big[2P-[1]-sen\,V'^2\,tang\,V + sen\,V'^2\,tang\,V'\Big]$

finalmente si avrà l' angolo ζ mediante l'equazione

7) $cos\,\zeta = \frac{sen\,\Phi' - sen\,\lambda'\,cos\,\varrho}{cos\,\lambda'\,sen\,\varrho}$.

SOLUZIONE 2

74. Prendasi come nella prima soluzione

$cos\ II = \frac{sen\ \varphi' - sen\ \lambda'\ cos\ P}{cos\ \lambda'\ sen\ P}$, e poichè si ha

$cos\ \zeta = \frac{sen\ \varphi' - sen\ \lambda'\ cos\ (P-\tau)}{cos\ \lambda'\ sen\ (P-\tau)}$, pongasi $\Phi\ \zeta = cos\ \zeta - cos\ II.$

Egli è manifesto che se, per brevità, facciamo

$a = \frac{d\ .\ cos\ II}{d\ P} = tang\ \lambda' - cos\ II\ cot\ P$

$b = \frac{d^2\ .\ cos\ II}{d\ P^2} = \frac{cos\ II}{sen\ P^2} - a\ cot\ P$

$c = \frac{d^3\ .\ cos\ II}{d\ P^3} = \frac{2\ a - 2\ cos\ II\ cot\ P}{sen\ P^2} - b\ cot\ P$

ec.

avremo secondo il teorema di Taylor

$\Phi\ \zeta = -\ a\ .\ \tau + \frac{b\ .\ \tau^2}{2} - \frac{c\ .\ \tau^3}{2.3} +$ ec.

Ora l' equazione precedente

$o = cos\ II - cos\ \zeta + \Phi\ \zeta$

paragonata coll' equazione (§ 43)

$o = \alpha - x + \Phi\ x$

ci dà $\alpha = cos\ II$, $x = cos\ \zeta$, $\Phi\ x = \Phi\ \zeta$. Facciasi dunque $\Psi\ x = \zeta$; $\Psi\ \alpha = II$, cosicchè abbiasi

$\frac{d.\Psi x}{d x} = \Psi' x = \frac{d\zeta}{d.\cos\zeta} = -\frac{1}{\operatorname{sen}\zeta}$; e pongasi

$$d.\frac{\left[\frac{(\Phi\zeta)^m}{\operatorname{sen}\zeta}\right]}{d\zeta} = (\Phi'\zeta)^m \; ; \quad d.\frac{\left[\frac{(\Phi'\zeta)^m}{\operatorname{sen}\zeta}\right]}{d\zeta} = (\Phi''\zeta)^m \; ; \quad d.\frac{\left[\frac{(\Phi''\zeta)^m}{\operatorname{sen}\zeta}\right]}{d\zeta} = (\Phi'''\zeta)^m \; ; \text{ec.}$$

ne risulterà l' angolo cercato

$$\zeta = H - \frac{\Phi H}{\operatorname{sen} H} + \frac{(\Phi'\zeta)^2}{2\operatorname{sen} H} - \frac{(\Phi''\zeta)^3}{2.3\operatorname{sen} H} + \frac{(\Phi'''\zeta)^4}{2.3.4\operatorname{sen} H} - \text{ec.}$$

nella qual espressione dopo le differenziazioni si metterà H in luogo di ζ.

75. Prendiamo l'esempio precedente, in cui si ommettono la sesta e le più alte potenze dell' eccentricità. Avremo

$$\Phi\zeta = -a.\tau + \frac{b.\tau^2}{2}$$

cioè ritenendo i valori di a, b sopra determinati, e sostituendo invece di τ il suo valore (§ 73)

$$\Phi\zeta = -\frac{\Delta^2}{2^2}.a\cos p'^2.(P-[1]) + \frac{\Delta^4}{2^7}\cos p'^4\Big[4b(P-[1])^2 + a(14P-16[1]+[2])\Big]$$

$$(\Phi\zeta)^2 = \frac{\Delta^4}{2^4}.a^2\cos p'^4(P-[1])^2$$

Quindi sarà

$$(\Phi'\zeta)^2 = \frac{d.\left[\frac{(\Phi\zeta)^2}{\operatorname{sen}\zeta}\right]}{d\zeta} = -\frac{\Delta^4}{2^4}.a^2\cos p'^4.\frac{\cot\zeta}{\operatorname{sen}\zeta}(P-[1])^2$$

$$+\frac{\Delta^4}{2^3}.a^2\frac{\cos p'^3}{\operatorname{sen}\zeta}(P-[1])\left(2(P-[1])\frac{d.\cos p'}{d\zeta} - \cos p'\frac{d.[1]}{d\zeta}\right)$$

Ma si sono già trovati sopra (§ 73) i valori di

$\frac{d.\cos p'}{d\zeta}$, $\frac{d.[1]}{d\zeta}$; si avrà pertanto

$$(\Phi'\zeta)^2 = -\frac{\Delta^4}{2^4}.a^2\cos p'^4.\frac{\cot H}{\operatorname{sen} H}(P-[1])^2$$

$$-\frac{\Delta^4}{2^3}.a^2\operatorname{sen}p'^2\cos p'^2.\frac{\cot H}{\operatorname{sen} H}(P-[1])\left[2P-[1]-\operatorname{sen}V^2\operatorname{tang}V+\operatorname{sen}V^2\operatorname{tang}V\right]$$

e l' equazione $\zeta = H - \frac{\Phi H}{\operatorname{sen} H} + \frac{(\Phi'\zeta)^2}{2\operatorname{sen} H}$ diventerà

$$\zeta = H+\frac{\Delta^2}{2^2}\cdot\frac{a}{\operatorname{sen} H}\cos p'^2(P-[1])-\frac{\Delta^4}{2^7}\cdot\frac{a}{\operatorname{sen} H}\cos p'^4(14P-16[1]+[2])$$

$$-\frac{\Delta^4}{2^5}\cos p'^4(P-[1])^2.\left[\frac{b}{\operatorname{sen} H}+\frac{a^2\cot H}{\operatorname{sen} H^2}\right]$$

$$-\frac{\Delta^4}{2^4}\cdot\frac{a^2}{\operatorname{sen} H^2}\operatorname{sen}p'^2\cos p'^2\cot H(P-[1])\left[2P-[1]-\operatorname{sen}V^2\operatorname{tang}V+\operatorname{sen}V^2\operatorname{tang}V\right]$$

Ma posto $A = \frac{d\,H}{d\,P}$; $B = \frac{d\,d\,H}{d\,P^2}$, si ha $\frac{a}{\operatorname{sen} H} = -A$;

$\frac{b}{\operatorname{sen} H} + \frac{a^2\cot H}{\operatorname{sen} H^2} = -B$, dunque avremo

$$\zeta = H-\frac{\Delta^2}{2^2}.A\cos p'^2(P-[1])+\frac{\Delta^4}{2^7}.A\cos p'^4(14P-16[1]+[2])$$

$$+\frac{\Delta^4}{2^5}.B\cos p'^4(P-[1])^2$$

$$-\frac{\Delta^4}{2^4}.A^2\operatorname{sen}p'^2\cos p'^2\cot H.(P-[1])\left[2P-[1]-\operatorname{sen}V^2\operatorname{tang}V+\operatorname{sen}V^2\operatorname{tang}V\right.$$

Colle formole precedenti (§ 73) si calcoleranno le quan-

tità H, A, p', V', V, e la quantità B si avrà dalla formola

$$B = -\cot H\,(1 + \cot P^2 + A \cot P \operatorname{tang} H + A^2)$$

76. Avressimo potuto dedurre l' angolo ζ immediatamente dal valore di ϱ trovato nella prima soluzione, poichè supponendo $\varrho = P - \mu$, cosicchè sia

$$\mu = \frac{\Delta^2}{2^2}\cos p'^2.(P-[1]) - \frac{\Delta^4}{2^4}\cos p'^4(14P - 16[1] + [2])$$

$$+ \frac{\Delta^4}{2^4}.A \operatorname{sen} p'^2 \cos p'^2 \cot H.(P-[1])(2P-[1]-\operatorname{sen} V'^2 \operatorname{tang} V + \operatorname{sen} V'^2 \operatorname{tang} V)$$

è evidente che H si cangia in ζ, quando in H si sostituisce $\varrho = P - \mu$ in luogo di P; ne risulta quindi secondo il teorema di Taylor

$$\zeta = H - \mu \cdot \frac{d\,H}{d\,P} + \frac{\mu^2}{2} \cdot \frac{d^2 H}{d\,P^2} - \frac{\mu^3}{2.3} \cdot \frac{d^3 H}{d\,P^3} + \text{ec.}$$

la qual espressione è precisamente la stessa che la precedente, avendosi

$$A = \frac{d\,H}{d\,P};\ B = \frac{d^2 H}{d\,P^2};\ \text{ec.}\ \ \mu^2 = \frac{\Delta^4}{2^4}\cos p'^4.(P-[1])^2.$$

Questa riflessione ha luogo in tutte le diverse soluzioni de' seguenti problemi.

77. Negligentando ancora la potenza quarta dell'eccentricità, si avrà

$$\zeta = H - \frac{e^2}{2^2}.A \cos p'^2 (P-[1])$$

Qualora poi si voglia prescindere dalla riduzione delle latitudini alla sfera inscritta, si prenderà un angolo h tale che sia

$$\cos h = \frac{sen\ \Phi - sen\ \lambda\ cos\ P}{cos\ \lambda\ sen\ P}$$

e siccome negligentando le potenze dell' eccentricità superiori al quadrato, si ha (§§ 33, 34)

$$\Phi' = \Phi - \frac{e^2}{2^2} sen\ 2\ \Phi\ ;\ \lambda' = \lambda - \frac{e^2}{2^2} sen\ 2\ \lambda$$

ne risulterà

$$H = h - \frac{e^2}{2^2} sen\ 2\Phi . (\frac{d\ h}{d\ \varphi}) - \frac{e^2}{2^2}\ sen\ 2\ \lambda\ .\ (\frac{d\ h}{d\ \lambda})$$

Ma dal precedente valore di $cos\ h$ si deduce

$$\frac{d\ h}{d\ \varphi} = -\frac{cos\ \Phi}{sen\ h\ cos\ \lambda\ sen\ P}\ ;\ \frac{d\ h}{d\ \lambda} = \frac{cos\ \lambda\ cos\ P - tang\ \lambda\ (sen\ \Phi - sen\ \lambda\ cos\ P)}{sen\ h\ cos\ \lambda\ sen\ P}$$

avremo pertanto

$$H = h + \frac{e^2}{2} \cdot \frac{sen\ \Phi\ (cos\ \Phi^2 + sen\ \lambda^2) - sen\ \lambda\ cos\ P}{sen\ h\ cos\ \lambda\ sen\ P}$$

Essendo poi $cos\ p'^2$, A, [1] già moltiplicati in e^2, si metterà p in vece di p'; $A = \frac{d\ h}{d\ P}$; $sen\ P\ cos\ (2\ v' + P) =$ $sen\ (v - v')\ cos\ (v + v')$ in vece di [1]. Dunque, se si tien conto del solo quadrato dell' eccentricità, il calcolo dell' angolo ζ per mezzo dei tre elementi λ, Φ, P si eseguirà colle seguenti formole

1) $\cos h = \dfrac{\operatorname{sen}\Phi - \operatorname{sen}\lambda \cos P}{\cos\lambda \operatorname{sen} P}$

2) $\operatorname{sen} p = \operatorname{sen} h \cos\lambda$

3) $\operatorname{sen} v' = \dfrac{\operatorname{sen}\lambda}{\cos p}$

4) $A = \dfrac{\cos h \cot P - \operatorname{tang}\lambda}{\operatorname{sen} h}$

5) $M = \dfrac{\operatorname{sen}\Phi\,(\cos\Phi^2 + \operatorname{sen}\lambda^2) - \operatorname{sen}\lambda\cos P}{\operatorname{sen} h \cos\lambda \operatorname{sen} P}$

6) $\zeta = h + \dfrac{e^2}{4}\left[2M - A\cos p^2\left(P - \operatorname{sen} P \cos(2v' + P)\right)\right]$

78. Un' altra espressione dell'angolo ζ indipendente dalle latitudini sulla sfera inscritta si può ottenere immediatamente dal valore di P sopra (§§ 24, 27) determinato. In fatti ommettendo la quarta potenza dell'eccentricità, si ha

$$P = (1 + \frac{e^2}{4}\cos p^2)(v - v') - \frac{3}{4}e^2 \cos p^2 \operatorname{sen}(v - v')\cos(v + v') - \frac{e^2}{2}\operatorname{sen} p^2 . \frac{\cos v' \operatorname{sen}(v - v')}{\cos v}$$

dividendo per $1 + \dfrac{e^2}{4}\cos p^2$; e facendo per brevità

$$T = \frac{e^2}{4} \cdot \left[\cos p^2\left(P - 3\operatorname{sen} P \cos(2v' + P)\right) - 2\frac{\operatorname{sen} p^2 \operatorname{sen} P \cos v'}{\cos(v' + P)}\right]$$

ne risulterà l' equazione

$P - T = v - v'$

da cui si dedurrà come sopra (§ 72)

$\cos\zeta = \dfrac{\operatorname{sen}\Phi - \operatorname{sen}\lambda\cos(P - T)}{\cos\lambda \operatorname{sen}(P - T)}$

Onde posto $\cos h = \frac{\operatorname{sen}\phi - \operatorname{sen}\lambda \cos P}{\cos\lambda \operatorname{sen} P}$, avremo

$\cos\zeta = \cos h - T.\left(\frac{d.\cos h}{d P}\right)$, e per conseguenza

$\zeta = h + \frac{T}{\operatorname{sen} h}\cdot\left(\frac{d.\cos h}{d P}\right)$, vale a dire

$$\zeta = h - \frac{e^2}{4}.A\left[\cos p^2\left(P - 3\operatorname{sen} P\cos(2v' + P)\right) - \frac{2\operatorname{sen} p^2 \operatorname{sen} P\cos v'}{\cos(v' + P)}\right]$$

L' identità di questo valore di ζ col precedente (§ 77) è facile a provarsi.

PROBLEMA IV

79. Dati nel triangolo sferoidico elittico i tre elementi ϕ, ζ, P trovare la latitudine λ.

SOLUZIONE I

Alla data latitudine ϕ si trovi la corrispondente ϕ' sulla sfera inscritta (§ 33), e ritenuto il valore di τ come sopra (§ 72), l' equazione (XV) diventerà

$P - \tau = V - V'$

Supponendo pertanto che sia λ' la latitudine sulla sfera inscritta corrispondente alla cercata latitudine λ, avremo

$$\cos\zeta = \frac{\operatorname{sen}\phi' - \operatorname{sen}\lambda'\cos(P-\tau)}{\cos\lambda'\operatorname{sen}(P-\tau)} = \frac{\operatorname{sen}\phi'(1 + \tan\tfrac{1}{2}\lambda'^2) - 2\cos(P-\tau)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\lambda'}{(1 - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\lambda'^2)\operatorname{sen}(P-\tau)}$$

reciprocamente sarà

$$tang\ \tfrac{1}{2}\lambda' = \frac{cos\,(P-\tau) \pm \sqrt{[cos\,\phi'^2 - sen\,\zeta^2\,sen(P-\tau)^2]}}{sen\,\phi' + cos\,\zeta\,sen\,(P-\tau)}$$

Posto ora $P-\tau=\varrho$; $\tau=\Phi\varrho$, avremo come sopra (§ 72)

$$\varrho = P - \Phi P + \frac{d\,(\Phi\varrho)^2}{2\,d\,\varrho} - \frac{d^2\,(\Phi\varrho)^3}{2.3\,d\,\varrho^2} + \text{ec.}$$

purchè si ponga dopo le differenziazioni P in luogo di ϱ. Ed è facile da vedere che essendo in generale

$$\frac{d(\Phi\varrho)^m}{d\,\varrho} = 2\,m(\Phi\varrho)^{m-1} \cdot \left(\frac{d\,\lambda'}{d\,\varrho}\right) \cdot \left[\tfrac{1}{2}P \cdot \frac{d\,\alpha_0}{d\,\lambda'} + [1].\frac{d\,\alpha_1}{d\,\lambda'} + [2]\frac{d\,\alpha_2}{d\,\lambda'} + \text{ec.}\right.$$

$$\left. + \alpha_1 \cdot \frac{d\,[1]}{d\,\lambda'} + \alpha_2 \cdot \frac{d\,[2]}{d\,\lambda'} + \text{ec.}\right]$$

e dall' equazione $cos\,\zeta = \frac{sen\,\phi' - sen\,\lambda'\,cos\,\varrho}{cos\,\lambda'\,sen\,\varrho}$ avendosi

$$\frac{d\,\lambda'}{d\,\varrho} = \frac{tang\,\lambda'\,tang\,\varrho - cos\,\zeta}{1 - cos\,\zeta\,tang\,\lambda'\,tang\,\varrho}$$

tanto $\frac{d\,(\Phi\varrho)^m}{d\,\varrho}$, quanto $\frac{d^2\,(\Phi\varrho)^m}{d\,\varrho^2}$; $\frac{d^3\,(\Phi\varrho)^m}{d\,\varrho^3}$; ec.

saranno funzioni di ϱ, λ' e delle costanti ζ, ϕ', che si possono agevolmente determinare. Dal valore di ϱ si otterrà λ' mediante l' equazione

$$tang\,\tfrac{1}{2}\lambda' = \frac{cos\,\varrho \pm \sqrt{(cos\,\phi'^2 - sen\,\zeta^2\,sen\,\varrho^2)}}{sen\,\phi' + cos\,\zeta\,sen\,\varrho}$$

e finalmente alla latitudine λ' nella sfera inscritta si troverà (§§ 33, 34) la corrispondente latitudine λ nello sferoide elittico.

80. Ponghiamo, per esempio, che si negligentino

la sesta e le più alte potenze dell'eccentricità, e che si abbia

$$\Phi\varrho = r = \frac{\Delta^2}{2^2}\cos p'^2 (P - [1]) - \frac{\Delta^4}{2^5}\cos p'^4 (14P - 16[1] + [2])$$

$$(\Phi\varrho)^2 = \frac{\Delta^4}{2^4}\cos p'^4 (P - [1])^2$$

$$\frac{d(\Phi\varrho)^2}{2\,d\varrho} = \frac{\Delta^4}{2^4}\cos p'^3 . (P - [1]) . \frac{d\lambda'}{d\varrho} \cdot \left(2(P - [1])\frac{d.\cos p'}{d\lambda'} - \cos p' \frac{d.[1]}{d\lambda'}\right)$$

Siccome è $sen\, p' = sen\, \zeta \cos \lambda'$, sarà

$$\frac{d.sen\, p'}{d\lambda'} = -sen\, \zeta\, sen\, \lambda' = -sen\, p'\, tang\, \lambda' ,$$

ed avremo in primo luogo

$$\frac{d.\cos p'}{d\lambda'} = -\, tang\, p' . \frac{d.sen\, p'}{d\lambda'} = sen\, p'\, tang\, p'\, tang\, \lambda' .$$

Si avrà in seguito $\frac{d.[1]}{d\lambda'} = \frac{dV}{d\lambda'} . \cos 2V - \frac{dV'}{d\lambda'} . \cos 2V'$.

Essendo poi $sen\, V = \frac{sen\, \Phi'}{\cos p'}$, sarà

$$\frac{dV}{d\lambda'} \cos V = \frac{d.sen\, V}{d\lambda'} = -\frac{sen\, \Phi'}{\cos p'^2} \cdot \frac{d.\cos p'}{d\lambda'} = -tang\, p'^2\, tang\, \lambda'\, sen\, V ;$$

onde avremo

$$\frac{dV}{d\lambda'} = -\, tang\, p'^2\, tang\, \lambda'\, tang\, V$$

Inoltre essendo $\cos V' = \frac{\cos \zeta \cos \lambda'}{\cos p'}$ ne verrà

$$-\frac{d\,V'}{d\,\lambda'}\,sen\,V' = \frac{d\,.\,cos\,V'}{d\,\lambda'} = -\frac{cos\,\zeta\,sen\,\lambda'}{cos\,p'} - \frac{cos\,V'}{cos\,p'}\cdot\frac{d\,.\,cos\,p'}{d\,\lambda'}$$

e per conseguenza

$$\frac{d\,V'}{d\,\lambda'} = \frac{tang\,\lambda'}{cos\,p'^2}\,.\,cot\,V'$$

cosicchè sarà $2\,(P-[1])\,\frac{d\,.\,cos\,p'}{d\,\lambda'} - cos\,p'\,\frac{d\,.\,[1]}{d\,\lambda'} =$

$$\frac{tang\,\lambda'}{cos\,p'}\cdot\left[2(P-[1])\,sen\,p'^2 + tang\,V\,cos\,2\,V\,sen\,p'^2 + cot\,V'\,cos\,2\,V'\right]$$

Abbiamo poi determinato sopra il valore di $\frac{d\,\lambda'}{d\,\varrho}$. Laonde mettendo P in luogo di ϱ, e supponendo che in questo caso λ' diventi L', e sia per brevità $A = \frac{d\,L'}{d\,P}$,

ne risulterà

$$\frac{d(\Phi\varrho)^2}{2\,d\,\varrho} = \frac{\Delta^4}{2^3}\,A\,sen\,p'^2\,cos\,p'^2\,tang\,L'\,(P-[1])^2$$

$$+\frac{\Delta^4}{2^4}\,A\,cos\,p'^2\,tang\,L'\,.\,(P-[1])\left[sen\,p'^2\,tang\,V\,cos\,2\,V + cot\,V'\,cos\,2\,V'\right]$$

ed il calcolo della latitudine λ' per mezzo dei tre dati elementi ϕ', ζ, P si eseguirà nel modo seguente

1) $$tang\,\tfrac{1}{2}\,L' = \frac{cos\,P \pm \sqrt{(cos\,\phi'^2 - sen\,\zeta^2\,sen\,P^2)}}{sen\,\phi' + cos\,\zeta\,sen\,P}$$

2) $$A = \frac{tang\,L'\,tang\,P - cos\,\zeta}{1 - cos\,\zeta\,tang\,L'\,tang\,P}$$

3) $$sen\,p' = sen\,\zeta\,cos\,L'$$

4) $sen\, V' = \frac{sen\, L'}{cos\, p'}$

5) $sen\, V = \frac{sen\, \Phi'}{cos\, p'}$; oppure $V = V' + P$

6) $\varrho = P - \frac{\Delta^2}{2^3} cos\, p'^2 (P - [1]) + \frac{\Delta^4}{2^7} cos\, p'^4 (14P - 16[1] + [2])$

$$+ \frac{\Delta^4}{2^3} . A\, sen\, p'^2\, cos\, p'^2\, tang\, L' . (P - [1])^2$$

$$+ \frac{\Delta^4}{2^4} . A\, cos\, p'^2\, tang\, L' . (P - [1])(sen\, p'^2\, tang\, V cos\, 2V + cot\, V' cos\, 2V')$$

e questo valore di ϱ sostituito nell' equazione

7) $tang\, \frac{1}{2} \lambda' = \frac{cos\, \varrho \pm \sqrt{(cos\, \varrho'^2 - sen\, \zeta^2\, sen\, \varrho^2)}}{sen\, \Phi' + cos\, \zeta\, sen\, \varrho}$

darà la latitudine λ' nella sfera inscritta, a cui si troverà (§§ 33, 34) la corrispondente latitudine λ sullo sferoide.

SOLUZIONE 2

81. Ritenuto il valore di τ sopra (§ 72) determinato, e supponendo che si abbia l' equazione

$$tang\, \tfrac{1}{2} L' = \frac{cos\, P \pm \sqrt{(cos\, \Phi'^2 - sen\, \zeta^2\, sen\, P^2)}}{sen\, \Phi' + cos\, \zeta\, sen\, P}$$

egli è chiaro, che se si pone $P - \tau$ in luogo di P, l' arco L' si cangia in λ'; avremo pertanto

$$tang\, \tfrac{1}{2} \lambda' = tang\, \tfrac{1}{2} L' - \tau . \frac{d . tang\, \frac{1}{2} L'}{d\, P} + \frac{\tau^2}{2} . \frac{d^2 . tang\, \frac{1}{2} L'}{d\, P^2} - \frac{\tau^3}{2.3} . \frac{d^3 . tang\, \frac{1}{2} L'}{d\, P^3} + \text{ec.}$$

Onde mettendo per brevità

$$a = \frac{d\,tang\,\frac{1}{2}L'}{d\,P}\;;\; b = \frac{d^2.tang\,\frac{1}{2}L'}{d\,P^2}\;;\; c = \frac{d^3.tang\,\frac{1}{2}L'}{d\,P^3}\;;\text{ ec.}$$

e di più

$$\Phi\,\lambda' = -a\,\tau + b\,.\,\frac{\tau^2}{2} - c\,.\,\frac{\tau^3}{2.3} + \text{ec.}$$

ne verrà l' equazione

$$0 = tang\,\tfrac{1}{2}L' - tang\,\tfrac{1}{2}\lambda' + \Phi\,\lambda'$$

la quale confrontata coll' equazione (§ 43)

$$0 = z - x + \Phi\,x$$

ci dà $z = tang\,\frac{1}{2}L'$; $x = tang\,\frac{1}{2}\lambda'$; $\Phi\,x = \Phi\,\lambda'$. Dunque se si vuole il valor immediato della latitudine λ' per mezzo dell' arco conosciuto L', bisognerà fare $\Psi\,x = \lambda'$;

d' onde risulta $\Psi' x = \frac{d\,\Psi\,x}{d\,x} = 2\,cos\,\frac{1}{2}\lambda'^2$. Quindi posto

$$\frac{d\,.\,[(\Phi\,\lambda')^m\,cos\,\frac{1}{2}\lambda'^2]}{d\,\lambda'} = (\Phi'\lambda')^m\;;\; \frac{d\,[(\Phi'\,\lambda')^m\,cos\,\frac{1}{2}\lambda'^2]}{d\,\lambda'} = (\Phi''\lambda')^m\;;$$

$$\frac{d\,[(\Phi''\,\lambda')^m\,cos\,\frac{1}{2}\lambda'^2]}{d\,\lambda'} = (\Phi'''\,\lambda')^m\text{; ec. si avrà}$$

$$\lambda' = L' + 2\,\Phi\,L'.cos\,\tfrac{1}{2}L'^2 + \frac{2^2(\Phi'\lambda')^2.cos\,\frac{1}{2}L'^2}{2} + \frac{2^3(\Phi''\lambda')^3.cos\,\frac{1}{2}L'^3}{2.3} + \text{ec.}$$

purchè in $(\Phi'\lambda')^2$, $(\Phi''\lambda')^3$, ec. si ponga L' in luogo di λ'.

82. Prendiamo l' esempio precedente in cui si negligentano i termini dell'ordine Δ^6, avremo

$$\Phi\lambda' = -a\,.\,\tau + b\,.\,\frac{\tau^2}{2}$$

Per determinare a, b senza introdurre dei radicali, si ponga (§ 80)

$$A = \frac{d\,L'}{d\,P};\ B = \frac{d\,d\,L'}{d\,P^2},\ \text{sarà}\ a = \frac{A}{2\cos\frac{1}{2}L^2};\ b = \frac{B + A^2 tang\frac{1}{2}L'}{2\cos\frac{1}{2}L'^2},$$

ed avremo

$$\Phi\lambda' = -\frac{\Delta^2}{2^2}.a\cos p'^2(P-[1]) + \frac{\Delta^4}{2^7}\cos p'^4\Big[4b(P-[1])^2 + a(14P - 16[1] + [2])\Big]$$

$$(\Phi\lambda')^2 = \frac{\Delta^4}{2^4}\,.\,a^2\cos p'^4(P-[1])^2$$

$$(\Phi'\lambda')^2 = \frac{d\,[(\Phi\lambda')^2\cos\frac{1}{2}\lambda'^2]}{d\,\lambda'} = -\frac{\Delta^4}{2^4}.a^2\,(P-[1])^2\cos p'^4\cos\tfrac{1}{2}\lambda'^2 tang\tfrac{1}{2}\lambda'$$

$$+\frac{\Delta^4}{2^3}.a^2(P-[1])\cos p'^3\cos\tfrac{1}{2}\lambda'^2\Big(2(P-[1])\frac{d.\cos p'}{d\,\lambda'} - \cos p'\frac{d.[1}{d\,\lambda}$$

vale a dire (§ 80)

$$(\Phi'\lambda')^2 = -\frac{\Delta^4}{2^4}.a^2\cos\tfrac{1}{2}L'^2 tang\tfrac{1}{2}L'\cos p'^4\,.\,(P-[1])^2$$

$$+\frac{\Delta^4}{2^5}.a^2\cos\tfrac{1}{2}L'^2 tang L'\cos p'^2.(P-[1])\Big[2(P-[1])sen p'^2 + tang V\cos 2V sen p'^2$$

$$+\cot V'\cos 2V'\Big]$$

Laonde, mettendo in luogo di a, b i loro valori, l'equazione

$$\lambda' = L' + 2\,\Phi L'\,.\cos\tfrac{1}{2}L'^2 + \frac{2^2(\Phi'\lambda')^2.\cos\frac{1}{2}L'^2}{2}\ \text{diventerà}$$

$$\lambda' = L' - \frac{\Delta^2}{2^2} . A \cos p'^2 (P - [1]) + \frac{\Delta^4}{2^7} . A \cos p'^4 (14P - 16[1] + [2])$$

$$+ \frac{\Delta^4}{2^5} . B \cos p'^4 (P - [1])^2 + \frac{\Delta^4}{2^3} . A^2 \operatorname{sen} p'^2 \cos p'^2 \operatorname{tang} L' . (P - [1])^2$$

$$+ \frac{\Delta^4}{2^4} . A^2 \cos p'^2 \operatorname{tang} L' . (P - [1])(\operatorname{sen} p'^2 \operatorname{tang} V \cos 2V + \cot V' \cos 2V')$$

Le quantità L', A, p', V', V si desumeranno dalle cinque formole precedenti (§ 80), e B dalla formola

$$B = \frac{1 + A \cos \zeta}{1 - \cos \zeta \operatorname{tang} L' \operatorname{tang} P} \cdot \left(\frac{\operatorname{tang} L'}{\cos P^2} + \frac{A \operatorname{tang} P}{\cos L'^2} \right)$$

83. Trascurando ancora la quarta potenza dell'eccentricità, avremo

$$\lambda' = L' - \frac{e^2}{2^2} . A \cos p'^2 . (P - [1])$$

Se poi si vuol avere la latitudine λ indipendentemente dalla sfera inscritta, si dovrà prendere un angolo L tale che sia

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} L = \frac{\cos P \pm \sqrt{(\cos \Phi^2 - \operatorname{sen} \zeta^2 \operatorname{sen} P^2)}}{\operatorname{sen} \Phi + \cos \zeta \operatorname{sen} P}$$

Onde sarà (§§ 33, 77)

$$L' = L - \frac{e^2}{2} \operatorname{sen} 2\Phi . \left(\frac{dL}{d\Phi} \right) = L - \frac{e^2}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} \Phi \cos \Phi^2}{\cos L \cos P - \cos \zeta \operatorname{sen} L \operatorname{sen} P}$$

Inoltre essendo (§ 33)

$\lambda' = \lambda - \frac{e^2}{2^2} \operatorname{sen} 2\lambda = \lambda - \frac{e^2}{2^2} \operatorname{sen} 2L$, avremo

$$\lambda = L + \frac{e^2}{2^2} \left[\operatorname{sen} 2L - 2M - A \cos p^2 \left(P - \operatorname{sen} P \cos (2v' + P) \right) \right]$$

nella qual equazione è

$$1)\quad tang\,\tfrac{1}{2}L = \frac{cos\,P \pm \sqrt{(cos\,\phi^2 - sen\,\zeta^2\,sen\,P^2)}}{sen\,\phi + cos\,\zeta\,sen\,P}$$

$$2)\quad sen\,p = sen\,\zeta\,cos\,L$$

$$3)\quad sen\,v' = \frac{sen\,L}{cos\,p}$$

$$4)\quad M = \frac{sen\,\phi\,cos\,\phi^2}{cos\,L\,cos\,P - cos\,\zeta\,sen\,L\,sen\,P}$$

$$5)\quad A = \frac{tang\,L\,tang\,P - cos\,\zeta}{1 - cos\,\zeta\,tang\,L\,tang\,P}$$

84. Riesce forse alquanto più semplice l' espressione di λ che si ricava immediatamente dal valore primitivo di P. In fatti, ritenuto il valore di T precedentemente (§ 78) stabilito, si avrà l'equazione $P - T = v - v'$ da cui si dedurrà come sopra (§ 79)

$$tang\,\tfrac{1}{2}\lambda = \frac{cos\,(P-T) \pm \sqrt{[cos\,\phi^2 - sen\,\zeta^2\,sen\,(P-T)^2]}}{sen\,\phi + cos\,\zeta\,sen\,(P-T)}$$

Onde, siccome λ diventa L quando in λ si mette P in luogo di $P - T$, avremo

$$\lambda = L - T \cdot \frac{d\,L}{d\,P}$$

vale a dire, sostituendo il valore di T e facendo $A = \frac{d\,L}{d\,P}$,

$$\lambda = L - \frac{e^2}{2^2} \cdot A\left[cos\,p^2\left(P - 3\,sen\,P\,cos\,(2v' + P)\right) - \frac{2\,sen\,p^2\,sen\,P\,cos\,v'}{cos\,(v' + P)}\right]$$

nella qual formola L, p, v', A sono le stesse quantità or ora (§ 83) determinate.

85. Può accadere che l'angolo dato ζ sia retto. In tal caso la latitudine λ si otterrà dai tre dati elementi $P, \Phi, \zeta = 90^{\circ}$ mediante l'equazione (XII), la quale è indipendente dalle latitudini sulla sfera inscritta; imperciocchè posto

$$\varkappa = C_0 . P + C_1 . sen\, 2\psi + C_2 . sen\, 4\psi + \text{ec.}$$

la detta equazione diventerà $P - \varkappa = \psi$; ed avendosi

$cos\, \psi = \frac{sen\, \Phi}{sen\, \lambda}$, sarà $sen\, \lambda = \frac{sen\, \Phi}{cos\, \psi} = \frac{sen\, \Phi}{cos\, (P - \varkappa)}$.

Supponendo per tanto $\varkappa = \Phi\, \psi$, avremo l' equazione

$$o = P - \psi - \Phi\, \psi$$

da cui ricaveremo (§§ 43, 44)

$$\psi = P - \Phi\, P + \frac{d\, (\Phi\, \psi)^2}{2\, d\, \psi} - \frac{d^2 . (\Phi\, \psi)^3}{2.3\, d\, \psi^2} + \text{ec.}$$

e si metterà nel secondo membro P in luogo di ψ dopo tutte le differenziazioni.

Il valore di ψ ci somministrerà quello di λ mediante la formola $sen\, \lambda = \frac{sen\, \Phi}{cos\, \psi}$.

86. Stando nell' esempio in cui si negligentano le potenze dell' eccentricità superiori alla quarta, avremo

$$\Phi\, \psi = \varkappa = \frac{e^2}{2^3} sen\, \lambda^2 (2P + 3\, sen\, 2\psi) + \frac{3\, e^4}{2^6} sen\, \lambda^4 (12\, P + 16\, sen\, 2\psi + sen\, 4\psi)$$

$$(\Phi\, \psi)^2 = \frac{e^4}{2^6} sen\, \lambda^4 (2\, P + 3\, sen\, 2\, \psi)^2$$

$$\frac{d(\Phi\psi)^2}{2\,d\psi} = \frac{3e^4}{2^5}\,sen\,\lambda^4(2P+3\,sen\,2\psi)\cos 2\psi + \frac{e^4}{2^5}\,sen\,\lambda^3\cos\lambda.\left(\frac{d\lambda}{d\psi}\right).(2P+3\,sen\,2\psi)^2$$

Ma dall'equazione $sen\,\Phi = sen\,\lambda\cos\psi$ si ha $\frac{d\lambda}{d\psi} = tang\,\lambda\,tang\,\psi$.

Dunque mettendo P in luogo di ψ, e prendendo un angolo L tale che sia

$$sen\,L = \frac{sen\,\Phi}{\cos P}$$

l' equazione $\psi = P - \Phi P + \frac{d(\Phi\psi)^2}{2\,d\psi}$ diventerà

$$\psi = P - \frac{e^2}{2^3}\,sen\,L^2\,(2P + 3\,sen\,2P)$$

$$+\frac{e^4}{2^7}\,sen\,L^4\Big[6P(5-4\cos 2P)+3\,sen\,2P(4-5\cos 2P)+16P^2\,tang\,P\Big]$$

donde si dedurrà la latitudine cercata λ mediante la formola

$$sen\,\lambda = \frac{sen\,\Phi}{\cos\psi}.$$

87. La riflessione già fatta (§ 76) ci può somministrare il valore immediato della latitudine λ. Imperciocchè, siccome λ si cangia in L quando si mette P in luogo di ψ, se noi rappresentiamo il valore precedente di ψ per mezzo dell'equazione

$\psi = P - \chi$, avremo $\lambda = L - \chi.\frac{dL}{dP} + \frac{\chi^2}{2}\frac{d^2L}{dP^2}$, e sarà

$$\chi = \frac{e^2}{2^3}\,sen\,L^2\,(2P + 3\,sen\,2P)$$

$$-\frac{e^4}{2^7}\,sen\,L^4\Big[2P(5-4\cos 2P)+3\,sen\,2P(4-5\cos 2P)+16P^2\,tang\,P\Big]$$

$$\chi^2 = \frac{e^4}{2^6}\,sen\,L^4\,(2P + 3\,sen\,2P)^2$$

$$\frac{d\,L}{d\,P} = tang\,P\,tang\,L$$

$$\frac{d^2\,L}{d\,P^2} = tang\,L\left[1 + tang\,P^2\,(2 + tang\,L^2)\right]$$

Dai quali valori si otterrà la cercata latitudine λ nel caso di $\zeta = 90°$.

Problema V

88. Dati nel triangolo sferoidico elittico i tre elementi ζ, θ, P trovare la latitudine λ.

Soluzione I

Chiamando λ' la latitudine sulla sfera inscritta corrispondente a λ, sarà $sen\,p' = sen\,\zeta\,cos\,\lambda'$, e l'equazione (XIV) ci darà $sen\,\theta = \frac{sen\,p'}{cos\,\Phi'}$; e quindi essendo

$sen\,\Phi' = \frac{\sqrt{(sen\,\theta^2 - sen\,p'^2)}}{sen\,\theta}$, avremo

$$sen\,V = \frac{sen\,\Phi'}{cos\,p'} = \frac{\sqrt{(sen\,\theta^2 - sen\,p'^2)}}{sen\,\theta\,cos\,p'};\ cos\,V = \frac{sen\,\zeta\,cos\,\lambda'\,cos\,\theta}{sen\,\theta\,cos\,p'};$$

$$sen\,V' = \frac{sen\,\lambda'}{cos\,p'};\ cos\,V' = \frac{cos\,\zeta\,cos\,\lambda'}{cos\,p'}.$$

Ora conservando il valore stabilito (§ 72) di τ, si ha l'equazione $P - \tau = V - V'$, da cui si otterrà

$$sen(P-\tau) = sen(V-V') = \frac{-sen\,\zeta\,cos\,\theta\,sen\,\lambda'\,cos\,\lambda' + cos\,\zeta\,cos\,\lambda'\sqrt{(sen\,\theta^2 - sen\,p'^2)}}{sen\,\theta\,cos\,p'^2}$$

$$cos(P-\tau) = cos(V-V') = \frac{sen\,\zeta\,cos\,\zeta\,cos\,\theta\,cos\,\lambda'^2 + sen\,\lambda'\sqrt{(sen\,\theta^2 - sen\,p'^2)}}{sen\,\theta\,cos\,p'^2}$$

Eliminando i radicali da queste due equazioni, ne risulterà

$$tang\ \lambda' = \frac{cos\ \zeta\ cos\ (P-\tau) - sen\zeta\ cot\ \theta}{sen\ (P-\tau)}$$

Ponghiamo ora $P-\tau=\varrho$; $\tau=\Phi\varrho$, cosicchè abbiasi

$$o = P-\varrho-\Phi\varrho$$

otterremo (§§ 43, 44)

$$\varrho = P-\Phi P+\frac{d(\Phi\varrho)^2}{2\,d\varrho}-\frac{d^2(\Phi\varrho)^3}{2.3\,d\varrho^2}+\text{ec.}$$

e nel secondo membro di quest' equazione si dovrà mettere P in luogo di ϱ dopo tutte le differenziazioni. Sostituito poi il valore di ϱ nella formola

$$tang\ \lambda' = \frac{cos\ \zeta\ cos\ \varrho - sen\ \zeta\ cot\ \theta}{sen\ \varrho}$$

si avrà la latitudine λ', a cui si troverà la corrispondente λ sullo sferoide elittico.

89. Sia per esempio,

$$\Phi\varrho=\tau=\frac{\Delta^2}{2^2}cos\,p'^2(P-[1])-\frac{\Delta^4}{2^7}cos\,p'^4(14P-16[1]+[2])$$

$$(\Phi\varrho)^2=\frac{\Delta^4}{2^4}cos\,p'^4(P-[1])^2$$

sarà

$$\frac{d(\Phi\varrho)^2}{2\,d\varrho}=\frac{\Delta^4}{2^4}cos\,p'^3(P-[1]).\left(\frac{d\lambda'}{d\varrho}\right).\left(2(P-[1]).\frac{d\,cos\,p'}{d\lambda'}-cos\,p'\frac{d[1]}{d\lambda'}\right)$$

Sopra (§ 80) si è trovato $\frac{d\,cos\,p'}{d\lambda'}=sen\,p'\,tang\,p'\,tang\,\lambda'$.

Inoltre $\frac{d[1]}{d\lambda'} = \frac{dV}{d\lambda'} cos\, 2V - \frac{dV'}{d\lambda'} cos\, 2V'$.

Ora essendo $cos\, V = tang\, p' \, cot\, \theta$, sarà

$$\frac{d.cos V}{d\lambda} = cot\,\theta \left(\frac{d.tang\, p'}{d\lambda'}\right) = -\frac{cot\,\theta\, tang\, p'\, tang\,\lambda'}{cos\, p'^2} = -\frac{cos V\, tang\,\lambda'}{cos\, p'^2};$$

vale a dire $\frac{dV}{d\lambda'} = \frac{cot\, V\, tang\,\lambda'}{cos\, p'^2}$. Similmente sarà

$\frac{dV'}{d\lambda'} = \frac{cot\, V'\, tang\,\lambda'}{cos\, p'^2}$, e per conseguenza

$$\frac{d[1]}{d\lambda'} = \frac{tang\,\lambda'}{cos\, p'^2}(cot\, V\, cos\, 2V - cot\, V'\, cos\, 2V').$$

Dall' equazione poi $tang\,\lambda' = \frac{cos\,\zeta\, cos\,\varrho - sen\,\zeta\, cot\,\theta}{sen\,\varrho}$

si ricava $\frac{d\lambda'}{d\varrho} = -cos\,\lambda' (cos\,\lambda'\, cos\,\zeta + sen\,\lambda'\, cot\,\varrho)$.

Laonde supponendo che λ' diventi L' quando si mette P in luogo di ϱ, e facendo per brevità $A = \frac{dL'}{dP}$, si potrà calcolare la cercata latitudine colle seguenti formole:

1) $tang\, L' = \frac{cos\,\zeta\, cos\, P - sen\,\zeta\, cot\,\theta}{sen\, P}$

2) $A = -cos\, L' (cos\, L'\, cos\,\zeta + sen\, L'\, cot\, P)$

3) $sen\, p' = sen\,\zeta\, cos\, L'$

4) $cos\, V' = \frac{cos\,\zeta\, cos\, L'}{cos\, p'}$

5) $\cos V = \operatorname{tang} p' \cot \delta$

6) $\varrho = P - \frac{\Delta^2}{2^2}\cos p'^2 (P - [1]) + \frac{\Delta^4}{2^7}\cos p'^4 (14P - 16[1] + [2])$

$$+ \frac{\Delta^4}{2^3} \cdot A \operatorname{sen} p'^2 \cos p'^2 \operatorname{tang} L' \cdot (P - [1])^2$$

$$- \frac{\Delta^4}{2^4} \cdot A \cos p'^2 \operatorname{tang} L' \cdot (P - [1]) (\cot V \cos 2V - \cot V' \cos 2V')$$

7) $\operatorname{tang} \lambda' = \frac{\cos \zeta \cos \varrho - \operatorname{sen} \zeta \cot \delta}{\operatorname{sen} \varrho}$

SOLUZIONE 2

90. Conservando il valore di τ adottato nella prima soluzione, e posto $\operatorname{tang} L' = \frac{\cos \zeta \cos P - \operatorname{sen} \zeta \cot \delta}{\operatorname{sen} P}$,

egli è visibile che $\operatorname{tang} L'$ diventerà $\operatorname{tang} \lambda'$ qualora si sostituisca $P - \tau$ in vece di P, onde posto

$$a = \frac{d \cdot \operatorname{tang} L'}{dP}; \; b = \frac{d^2 \cdot \operatorname{tang} L'}{dP^2}; \; c = \frac{d^3 \cdot \operatorname{tang} L'}{dP^3}; \text{ ec.}$$

ne verrà

$$\operatorname{tang} \lambda' = \operatorname{tang} L' - a \cdot \tau + \frac{b \cdot \tau^2}{2} - \frac{c \cdot \tau^3}{2.3} + \text{ec.}$$

Facendo pertanto

$$\Phi \lambda' = -a\tau + \frac{b \cdot \tau^2}{2} - \frac{c \cdot \tau^3}{2.3} + \text{ec.},$$

si avrà l' equazione

$$0 = tang\, L' - tang\, \lambda' + \Phi\, \lambda'$$

la quale paragonata all' equazione (§ 43)

$$0 = \alpha - x + \Phi\, x$$

ci darà $\alpha = tang\, L'$, $x = tang\, \lambda'$, $\Phi\, x = \Phi\, \lambda'$. Facendo pertanto $\Psi\, x = \lambda'$, cosicchè sia $\Psi'\, x = \frac{d\, \Psi\, x}{d\, x} = cos\, \lambda'^2$, e mettendo

$$\frac{d.[(\Phi\,\lambda')^m cos\,\lambda'^2]}{d\,\lambda'} = (\Phi'\lambda')^m ; \frac{d.[(\Phi'\lambda')^m cos\,\lambda'^2]}{d\,\lambda'} = (\Phi''\lambda')^m ; \frac{d.[(\Phi''\lambda')^m cos\,\lambda'^2]}{d\,\lambda'} = (\Phi'''\lambda')^m ; \text{ec.}$$

otterremo

$$\lambda' = L' + \Phi\, L' . cos\, L'^2 + \frac{(\Phi'\lambda)^2 . cos\, L'^2}{2} + \frac{(\Phi''\lambda')^3 . cos\, L'^2}{2.3} + \text{ec.}$$

e si dovrà porre in $(\Phi'\,\lambda')^2$, $(\Phi''\,\lambda')^3$, ec. L' in luogo di λ' dopo le differenziazioni.

91. Ritenghiamo l' esempio precedente, in cui si ommettono le potenze dell' eccentricità superiori alla quarta, avremo $\Phi\,\lambda' = -a\,.\,\tau + \frac{b\,.\,\tau^2}{2}$, vale a dire

$$\Phi\lambda' = -\frac{\Delta^2}{2^2} . a\, cos\, p'^2 . (P - [1]) + \frac{\Delta^4}{2^7} . a\, cos\, p'^4 (14P - 16[1] + [2]) + \frac{\Delta^4}{2^5} b\, cos\, p'^4 . (P - [1])^2$$

$$(\Phi\,\lambda')^2 = \frac{\Delta^4}{2^4} . a^2\, cos\, p'^4 (P - [1])^4$$

$$\frac{d.[(\Phi\,\lambda')^2 cos\,\lambda'^2]}{d\,\lambda'} = (\Phi'\lambda')^2 = -\frac{\Delta^4}{2^3} . a^2\, cos\, p'^4\, sen\, \lambda'\, cos\, \lambda' . (P - [1])^2$$

$$+ \frac{\Delta^4}{2^4} . a^2 cos\, p'^3 cos\, \lambda'^2 . (P - [1]) \left[2(P - [1]) \frac{d.cos\, p'}{d\,\lambda'} - cos\, p' \frac{d.[1]}{d\,\lambda'} \right]$$

e siccome abbiamo già trovato (§ 89) i valori di

$\frac{d.\cos p'}{d\lambda'}$, $\frac{d.[1]}{d\lambda'}$, avremo

$$(\Psi'\lambda')^2 = -\frac{\Delta^4}{2^3}.a^2\cos p'^4 \operatorname{sen}\lambda'\cos\lambda'(P-[1])^2$$

$$+\frac{\Delta^4}{2^3}.a^2\cos p'^2\operatorname{sen}\lambda'\cos\lambda'.(P-[1]).\Big[2(P-[1])\operatorname{sen}p'^2-\cot V\cos 2V$$

$$+\cot V'\cos 2V'\Big]$$

Ponghiamo $A=\frac{dL'}{dP}$; $B=\frac{d\,dL'}{dP^2}$, ne verrà

$a=\frac{A}{\cos L'^2}$; $b=\frac{B+2A^2\operatorname{tang}L'}{\cos L'^2}$, e l'equazione

$\lambda'=L'+\Psi L'.\cos L'^2+\frac{(\Phi'\lambda')^2.\cos L'^2}{2}$ diventerà

$$\lambda'=L'-\frac{\Delta^2}{2^2}.A\cos p'^2.(P-[1])+\frac{\Delta^4}{2^7}.A\cos p'^4.(14P-16[1]+[2])$$

$$+\frac{\Delta^4}{2^5}.B\cos p'^4.(P-[1])^2$$

$$+\frac{\Delta^4}{2^4}.A^2\cos p'^2\operatorname{tang}L'(P-[1]).\Big[2(P-[1])\operatorname{sen}p'^2-\cot V\cos 2V+\cot V'\cos 2V'\Big]$$

nella quale le quantità L', A, p', V' V si calcoleranno colle cinque precedenti (§ 89) formole, e B colla formola

$$B=A(\operatorname{sen}2L'\cos\zeta-\cos 2L'\cot P)+\frac{\operatorname{sen}2L'}{2\operatorname{sen}P^2}.$$

92. Se volessimo il valore di λ indipendentemen-

te dalle latitudini sulla sfera inscritta, potremmo ricavarlo dall'una o dall'altra soluzione di questo problema. Prendiamo in fatti l'esempio della soluzione seconda, e rappresentiamo con μ la somma de' termini moltiplicati in Δ^2 ed in Δ^4, cosicchè sia $\lambda' = L' + \mu$. Siccome trascuriamo, per ipotesi, la sesta e le più alte potenze dell'eccentricità, basterà nel primo membro sostituire (§§ 33, 34)

$\lambda - \frac{\Delta^2}{2^2} sen\, 2\lambda + \frac{\Delta^4}{2^4} sen\, 2\lambda\,(2 + cos\, 2\lambda)$ in vece di λ'. Essendo poi l'arco L' determinato dall' equazione

$tang\, L' = \frac{cos\,\zeta\, cos\, P - sen\,\zeta\, cot\,\theta}{sen\, P}$ lo stesso tanto sulla sfera inscritta quanto sullo sferoide, tutti i termini del secondo membro resteranno invariabili. Avremo quindi l' equazione

$$\lambda - \frac{\Delta^2}{2^2} sen\, 2\lambda + \frac{\Delta^4}{2^4} sen\, 2\lambda\,(2 + cos\, 2\lambda) = L' + \mu\,;$$

o sia rimettendo il valore di μ

$$\lambda = L' + \frac{\Delta^2}{2^2}\cdot\left[sen\, 2\lambda - A\, cos\, p'^2\,(P - [1])\right] - \frac{\Delta^4}{2^4} sen\, 2\lambda\,(2 + cos\, 2\lambda)$$

$$+ \frac{\Delta^4}{2^7}\cdot A\, cos\, p'^4\,(14P - 16[1] + [2]) + \frac{\Delta^4}{2^5} cos\, p'^4\,(B + 4A^2\, tang\, p'^2\, tang\, L')(P - [1])^2$$

$$- \frac{\Delta^4}{2^4}\cdot A^2\, cos\, p'^2\, tang\, L'\cdot(P - [1])\,(cot\, V\, cos\, 2V - cot\, V'\, cos\, 2V')$$

Facendo $= \nu$ la somma di tutti i termini moltiplicati in Δ^4, e posto inoltre

$\Phi\lambda = \frac{\Delta^2}{2^4}\left[sen\ 2\lambda - A\cos p'^2 (P - [1])\right] + \nu$, la stessa equazione risulterà

$$o = L' - \lambda + \Phi\lambda$$

Si avrà pertanto (§§ 43, 44)

$\lambda = L' + \Phi L' + \frac{d(\Phi\lambda)^2}{2\,d\lambda}$, avvertendo di mettere nell' ultimo termine L' in luogo di λ dopo la differenziazione. Ora essendo

$$(\Phi\lambda)^2 = \frac{\Delta^4}{2^4}\left[sen\ 2\lambda - A\cos p'^2 (P - [1])\right]^2$$

e per conseguenza

$$\frac{d.(\Phi\lambda)^2}{2\,d\lambda} = \frac{\Delta^4}{2^3}\cos 2\lambda \,.\left[sen\ 2\lambda - A\cos p'^2 (P - [1])\right]$$

se si mette L' in luogo di λ ne verrà l' equazione

$$\lambda = L' + \frac{\Delta^2}{2^2}\left[sen\ 2L' - A\cos p'^2 (P - [1])\right] - \frac{\Delta^4}{2^4} sen\ 2L' (2 - \cos 2L')$$

$$+ \frac{\Delta^4}{2^7} . A\cos p'^4 . (14P - 16[1] + [2]) - \frac{\Delta^4}{2^3} . A\cos p'^2 \cos 2L' . (P - [1])$$

$$+ \frac{\Delta^4}{2^5}\cos p'^4 (B + 4A^2\, tang\, p'^2\, tang\, L')(P - [1])^2$$

$$- \frac{\Delta^4}{2^4} . A^2 \cos p'^2\, tang\, L' . (P - [1])(\cot V \cos 2V - \cot V' \cos 2V')$$

nella quale le quantità L', A, p', V, V', B hanno i medesimi valori sopra (§§ 89, 91) descritti.

93. Ben diverso in apparenza risulta il valore di λ che si deduce dall'equazione (6) trovata sopra (§§ 24, 27). Supponiamo in fatti che si ommettano la quarta e le più alte potenze dell'eccentricità, e facciamo (§ 78)

$$T = \frac{\Delta^2}{2^2}\left[\cos p^2 (P - 3[1]) - 2 \operatorname{sen} p^2 . \frac{\operatorname{sen}(v - v') \cos v'}{\cos v}\right]$$

si avrà l'equazione $P - T = v - v'$. Ora essendo

$\operatorname{sen} v = \frac{\operatorname{sen} \Phi}{\cos p}$ bisognerà in vece di $\operatorname{sen} \Phi$ sostituire il suo valore espresso con i tre elementi ζ, θ, λ; lo che si farà mediante l'equazione fondamentale (1) trovata sopra (§§ 20, 22), da cui si ricava

$$\cos \Phi^2 = \frac{\operatorname{sen} p^2}{\operatorname{sen} \vartheta^2 - \Delta^2 (\operatorname{sen} p^2 - \operatorname{sen} \vartheta^2 \cos \lambda^2)}$$

Di maniera che, facendo per brevità

$$X = \frac{1 - \frac{\Delta^2 (\operatorname{sen} p^2 - \operatorname{sen} \vartheta^2 \cos \lambda^2)}{\operatorname{sen} \vartheta^2 - \operatorname{sen} p^2}}{1 - \frac{\Delta^2 (\operatorname{sen} p^2 - \operatorname{sen} \vartheta^2 \cos \lambda^2)}{\operatorname{sen} \vartheta^2}}; \quad Y = \frac{1 + \frac{\Delta^2 (\operatorname{sen} p^2 - \operatorname{sen} \vartheta^2 \cos \lambda^2)}{\cos \theta^2}}{1 - \frac{\Delta^2 (\operatorname{sen} p^2 - \operatorname{sen} \vartheta^2 \cos \lambda^2)}{\operatorname{sen} \theta^2}}$$

avremo

$$\operatorname{sen} v = \frac{\sqrt{[X (\operatorname{sen} \vartheta^2 - \operatorname{sen} p^2)]}}{\operatorname{sen} \theta \cos p}; \quad \cos v = \operatorname{tang} p \cot \theta \sqrt{Y};$$

sarà inoltre $\operatorname{sen} v' = \frac{\operatorname{sen} \lambda}{\cos p}$; $\cos v' = \frac{\cos \zeta \cos \lambda}{\cos p}$;

ne risulterà quindi

$$sen(P-T)=sen(v-v')=\frac{-sen\lambda\cos\vartheta sen\, p\,.\sqrt{Y}+\cos\lambda\cos\zeta\sqrt{[X(sen\,\theta^2-sen\,p^2)]}}{sen\,\theta\,\cos p^2}$$

$$\cos(P-T)=\cos(v-v')=\frac{\cos\lambda\cos\vartheta\cos\zeta\, sen\, p\sqrt{Y}+sen\,\lambda\sqrt{[X(sen\,\theta^2-sen\,p^2)]}}{sen\,\theta\,\cos p^2}$$

dalle quali espressioni eliminando gli ultimi radicali, si ottiene l'equazione

$$\cos\zeta\,\cos\lambda\,\cos(P-T)-sen\,\lambda\,sen\,(P-T)=sen\,\zeta\cos\lambda\cot\theta\,.\sqrt{Y}$$

Onde si avrà $tang\,\lambda=\frac{\cos\zeta\cos(P-T)-sen\,\zeta\,\cot\theta\,.\sqrt{Y}}{sen\,(P-T)}$.

Essendo poi, nell'ipotesi che si ommettano le potenze dell'eccentricità superiori al quadrato,

$$\sqrt{Y}=1+\frac{\Delta^2}{2}\,.\,\cos\lambda^2.\frac{(sen\,\zeta^2-sen\,\vartheta^2)}{sen\,\vartheta^2\cos\vartheta^2}$$

Se facciamo $tang\,L'=\frac{\cos\zeta\cos P-sen\,\zeta\,\cot\vartheta}{sen\,P}$, avremo

$$tang\,\lambda=tang\,L'-T.\left(\frac{d.tang\,L'}{d\,P}\right)-\frac{\Delta^2}{2}\frac{sen\,\zeta\cos\lambda^2\cot\vartheta\,(sen\,\zeta^2-sen\,\vartheta^2)}{sen\,P\,sen\,\vartheta^2\,\cos\vartheta^2}$$

Sostituendo il valore di T, e facendo

$A=\frac{d\,L'}{d\,P}=-\cos L'\,(\cos L'\cos\zeta+sen\,L'\cot P)$, ne risulterà

$$\lambda=L'-\frac{\Delta^2}{2^2}\cdot\left\{A\left(\cos p^2(P-3[1])-2\frac{sen\,p^2\,sen\,P\cos v'}{\cos(v'+P)}\right)\right.$$

$$\left.+2\frac{sen\,\zeta\cos L'\cot\vartheta\,(sen\,\zeta^2-sen\,\vartheta^2)}{sen\,P\,sen\,\vartheta^2\,\cos\vartheta^2}\right\}$$

Sopra (§ 92) abbiamo trovato l'espressione più semplice

$$\lambda=L'+\frac{\Delta^2}{2^2}\left[sen\,2\,L'-A\cos p'^2\,(P-[1])\right]$$

La diversità di questi valori di λ non è che apparente, ed ognuno potrà verificarne l' identità.

94. Dandosi il caso che l' angolo ζ sia retto, si potrà dalle precedenti soluzioni ottenere il valore di λ in diverse maniere. Sia, per esempio, da trovarsi λ per mezzo dei tre dati elementi $\zeta = 90^\circ, \theta, P$ indipendentemente dalla sfera inscritta, e negligentando la sesta e le più alte potenze dell' eccentricità. Nell' equazione ultimamente trovata (§ 92) si avrà

$$tang\ L' = \frac{-\cot \theta}{sen\ P}$$

$$A = -sen\ L' \cos L \cot P\ ;\ B = sen\ L' \cos L' \left(1 + 2 \cos L'^2 \cot P^2\right);$$

$$p' = 90^\circ - L'\ ;\ V' = 90^\circ\ ;\ V = 90^\circ + P$$

$$[1] = -sen\ P \cos P\ ;\ [2] = sen\ 2\ P \cos 2\ P\ .$$

Onde la detta equazione ci darà

$$\lambda = L + \frac{\Delta^2}{2^3} sen\ 2\ L' \left[2 + sen\ L'^2 \cot P . (P + sen\ P \cos P)\right]$$

$$- \frac{\Delta^4}{2^4} sen\ 2\ L' (1 + 2\ sen\ L'^2)$$

$$+ \frac{\Delta^4}{2^4} sen\ L'^5 \cos L' \cot P\ (28\ P + 16\ sen\ 2\ P + sen\ 4\ P)$$

$$+ \frac{\Delta^4}{2^5} sen\ L'^2\ sen\ 4\ L' \cot P (P + sen\ P \cos P)$$

$$+ \frac{\Delta^4}{2^5} sen\ L'^5 \cos L' . (1 + 6 \cos L'^2 \cot P^2) (P + sen\ P \cos P)^2$$

$$- \frac{\Delta^4}{2^4} sen\ L'^5 \cos L' \cot P \cos 2\ P (P + sen\ P \cos P)$$

Si avrebbe lo stesso risultato mediante (§ 71) l' equazione (XV), facendo in essa $\zeta = 90^\circ$

PROBLEMA VI

95. Dati nel triangolo sferoidico elittico i tre elementi ζ, λ, ϖ, trovare la latitudine Φ

SOLUZIONE I

Sieno λ', ϕ' le latitudini sulla sfera inscritta corrispondenti a λ, Φ sullo sferoide; l' equazione (XVI) ci somministrerà la soluzione del problema, poichè facendo

$$\tau = \beta_0.(V - V') + 2\beta_1.[1] + 2\beta_2.[2] + 2\beta_3.[3] + \text{ec.}$$

avremo (§ 67)

$$\varpi + \sigma = Z - Z'$$

e per conseguenza sarà

$$tang(\varpi + \sigma) = tang(Z - Z') = \frac{sen\, p'(tang\, V - tang\, V')}{1 + sen\, p'^2\, tang\, V\, tang\, V'};$$

o sia $$sen(\varpi + \sigma) = \frac{sen\, p'(tang\, V - tang\, V')}{\sqrt{(1 + sen\, p'^2\, tang\, V^2)(1 + sen\, p'^2\, tang\, V'^2)}};$$

$$cos(\varpi + \sigma) = \frac{1 + sen\, p'^2\, tang\, V\, tang\, V'}{\sqrt{(1 + sen\, p'^2\, tang\, V^2)(1 + sen\, p'^2\, tang\, V'^2)}};$$

E siccome si ha $sen\, p' = sen\, \zeta\, cos\, \lambda'$;

$$tang\, V = \frac{sen\, \Phi'}{\sqrt{(cos\, p'^2 - sen\, \Phi'^2)}};\quad tang\, V' = \frac{tang\, \lambda'}{cos\, \zeta},$$

ne verrà

$$sen\,(\varpi + \sigma) = \frac{sen\,\zeta\,cos\,\zeta\,cos\,\lambda'\,sen\,\Phi' - sen\,\zeta\,sen\,\lambda'\,\sqrt{(cos\,p'^2 - sen\,\Phi'^2)}}{cos\,\Phi'\,cos\,p'^2}$$

$$cos\,(\varpi + \sigma) = \frac{sen\,\zeta^2\,sen\,\lambda'\,cos\,\lambda'\,sen\,\Phi' + cos\,\zeta\,\sqrt{(cos\,p'^2 - sen\,\Phi'^2)}}{cos\,\Phi'\,cos\,p'^2}$$

Eliminando i radicali, otterremo l'equazione

$$cos\,\zeta\,sen\,(\varpi + \sigma) + sen\,\zeta\,sen\,\lambda'\,cos\,(\varpi + \sigma) = sen\,\zeta\,cos\,\lambda'\,tang\,\Phi'$$

cosicchè sarà

$$tang\,\Phi' = \frac{sen\,(\varpi + \sigma) + sen\,\lambda'\,tang\,\zeta\,cos\,(\varpi + \sigma)}{cos\,\lambda'\,tang\,\zeta}$$

Ponghiamo $u = \varpi + \sigma = \varpi + \Phi\,u$, di maniera che sia σ eguale ad una funzione di u, avremo l'equazione

$$0 = \varpi - u + \Phi\,u$$

da cui col teorema citato (§§ 43, 44) ne dedurremo

$$u = \varpi + \Phi\,\varpi + \frac{d\,.\,(\Phi\,u)^2}{2\,d\,u} + \frac{d^2\,.\,(\Phi\,u)^3}{2\,.\,3\,d\,u^2} + \text{ec.}$$

Ora si ha $\sigma = \Phi\,u = \beta_0\,.\,(V - V') + 2\,\beta_1\,.\,[1] + 2\,\beta_2\,.\,[2] + \text{ec.}$

ed essendovi solamente V che contenga la variabile Φ', avremo

$$\frac{d\,.\,(\Phi\,u)^m}{d\,u} = m\,.\,(\Phi\,u)^{m-1}\,.\,\left(\frac{d\,V}{d\,u}\right)\cdot\Big[\beta_0 + 2\,\beta_1\,cos\,2\,V + 4\,\beta_2\,cos\,4\,V + 6\,\beta_3\,cos\,6\,V + \text{ec.}\Big]$$

Dalle equazioni poi $tang\,\Phi' = \frac{sen\,u + sen\,\lambda'\,tang\,\zeta\,cos\,u}{cos\,\lambda'\,tang\,\zeta}$;

$sen\ V = \frac{sen\ \varphi'}{cos\ p'}$ ne viene

$$\frac{d\varphi'}{du} = \frac{cos\,\varphi'^2\,(cos\,u - sen\,\lambda'\,tang\,\zeta\,sen\,u)}{cos\,\lambda'\,tang\,\zeta}\ ;\ \frac{dV}{d\varphi'} = \frac{cos\,\varphi'}{cos\,p'\,cos\,V}$$

cosicchè sarà

$$\frac{dV}{du} = \left(\frac{d\varphi'}{du}\right)\left(\frac{dV}{d\varphi'}\right) = \frac{cos\,\varphi'^3\,(cos\,u - sen\,\lambda'\,tang\,\zeta\,sen\,u)}{cos\,p'\,cos\,\lambda'\,tang\,\zeta\,cos\,V}$$

Ne segue quindi che tanto $\frac{d\,.\,(\Phi\,u)^m}{du}$, quanto qualunque termine $\frac{d^n\,.\,(\Phi\,u)^m}{du^n}$ sarà una funzione di u, φ' facilmente determinabile colla semplice differenziazione.

Laonde se noi supponiamo

$$tang\,F' = \frac{sen\,\varpi + sen\,\lambda'\,tang\,\zeta\,cos\,\varpi}{cos\,\lambda'\,tang\,\zeta}.$$

e mettiamo dopo tutte le differenziazioni ϖ in luogo di u, ed F' in luogo di φ', otterremo il valore di u, da cui per mezzo della formola

$$tang\,\varphi' = \frac{sen\,u + sen\,\lambda'\,tang\,\zeta\,cos\,u}{cos\,\lambda'\,tang\,\zeta}\ .$$

si avrà φ', e da φ' si dedurrà (§ 33) la cercata latitudine φ.

96. Siccome questo problema può essere come il problema secondo molto utile nella geodesìa, ne daremo un esempio esteso, in cui non ommetteremo che la decima e le più alte potenze dell' eccentricità. In quest' ipotesi avremo

$$\Phi u = \tau = \beta_0 . (V - V') + 2\beta_1 . [1] + 2\beta_2 . [2] + 2\beta_3 . [3]$$

$$\frac{d(\Phi u)^2}{2\,du} = \left(\frac{dV}{du}\right)\Big[\beta_0 . (V-V') + 2\beta_1 . [1] + 2\beta_2 . [2]\Big](\beta_0 + 2\beta_1 \cos 2V + 4\beta_2 \cos 4V)$$

$$\frac{d^2 . (\Phi u)^3}{2.3\,du^3} = \left(\frac{dV}{du}\right)^2 \cdot \Big[\beta_0 . (V-V') + 2\beta_1 . [1]\Big](\beta_0 + 2\beta_1 \cos 2V)^2$$

$$- 2\beta^2_0 . \beta_1 . (V-V')^2 . \left(\frac{dV}{du}\right)^2 \operatorname{sen} 2V$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d\,dV}{du^2}\right)\Big[\beta_0 . (V-V') + 2\beta_1 . [1]\Big]^2 (\beta_0 + 2\beta \cos 2V)$$

$$\frac{d^3 . (\Phi u)^4}{2.3.4\,du^3} = \frac{1}{6} . \beta^4_0 . (V-V')\left[6\left(\frac{dV}{du}\right)^3 + 9\left(\frac{dV}{du}\right)\left(\frac{d\,dV}{du^2}\right)(V-V') + \frac{d^3 V}{du^3} \cdot (V-V')^2\right]$$

Onde posto $\frac{dV}{du} = a$; $\frac{d^2 V}{du^2} = b$; $\frac{d^3 V}{du^3} = c$, e mettendo ϖ in luogo di u, ed F' in luogo di ϕ', l' equazione $u = \varpi + \Phi\,\varpi + \frac{d(\Phi u)^2}{2\,du} + \frac{d^2 (\Phi u)^3}{2.3\,du^2} + \frac{d^3 (\Phi u)^4}{2.3.4\,du^3}$ diventerà

$$u = \varpi + \beta_0 . (V-V') + 2\beta_1 . [1] + 2\beta_2 . [2]$$

$$+ a\beta^2_0 . (V-V') + 2a\beta_0\beta_1 ([1] + (V-V')\cos 2V)$$

$$+ \frac{1}{2} . \beta^3_0 \Big[2a^2 + b(V-V')\Big]$$

$$+ 2\beta_3 . [3]$$

$$+ 2a\Big[2\beta^2_1 . [1]\cos 2V + \beta_0\beta_2 ([2] + 2(V-V')\cos 4V)\Big]$$

$$+\beta^2_0\,\beta_1\left[2a^2\Big([1]+2\,(V-V')\cos 2V-(V-V')^2\,sen\,2V\Big)\right.$$
$$\left.+b\Big(2\,[1]\,(V-V')+(V-V')^2\cos 2V\Big)\right]$$
$$+\frac{1}{6}\cdot\beta^4_0\,(V-V')\left[6a^3+9ab\,(V-V')+c\,(V-V')^2\right]$$

Le quantità β_0; β_1; β_2; β_3; p'; V' non dipendono (§ 67) che dagli angoli dati ζ, λ', ed essendo

$tang\,F'=\frac{sen\,\varpi+sen\,\lambda'\,tang\,\zeta\,cos\,\varpi}{cos\,\lambda'\,tang\,\zeta}$, sarà $sen\,V=\frac{sen\,F'}{cos\,p'}$.

Le quantità poi a, b, c, si potranno determinare nella seguente maniera.

Pongasi $A=\frac{d\,F'}{d\,\varpi}$; $B=\frac{d^2\,F'}{d\,\varpi^2}$; $C=\frac{d^3\,F'}{d\,\varpi^3}$, e siccome dall'equazione $sen\,V=\frac{sen\,F'}{cos\,p'}$ si ha $\frac{d\,V}{d\,F'}=\frac{cos\,F'}{cos\,p'\,cos\,V}$, otterremo

$$a=\frac{dV}{d\,u}=\left(\frac{d\,V}{d\,F'}\right)\left(\frac{d\,F'}{d\,\varpi}\right)=A\,cot\,F'\,tang\,V$$

$$b=\frac{d\,a}{d\,\varpi}=B\,cot\,F'\,tang\,V+A^2\,\frac{tang\,p'^2\,tang\,V}{cos\,V^2}$$

$$c=\frac{d\,b}{d\,\varpi}=C\,cot\,F'\,tang\,V+3\,A\,B\,\frac{tang\,p'^2\,tang\,V}{cos\,V^2}$$
$$+A^3\,\frac{tang\,p'^2\,cot\,F'\,tang\,V}{cos\,V^2}\,(1+3\,tang\,V^2)$$

Dall' equazione $tang\,F'=\frac{sen\,\varpi+sen\,\lambda'\,tang\,\zeta\,cos\,\varpi}{cos\,\lambda'\,tang\,\zeta}$ si han-

no i valori di A, B, C, cioè

$$A = \frac{\cos F'^2(\cos \varpi - \operatorname{sen} \lambda' \operatorname{tang} \zeta \operatorname{sen} \varpi)}{\cos \lambda' \operatorname{tang} \zeta}$$

$$B = -\operatorname{sen} F' \cos F' - 2 A^2 \operatorname{tang} F'$$

$$C = -A\left(\cos 2F' + 4B \operatorname{tang} F' + \frac{2A^2}{\cos F'^2}\right)$$

97. Trascuriamo la sesta e le più alte potenze dell'eccentricità, avremo semplicemente

$$u = \varpi + \beta_0 . (V - V')\left[1 + a\beta_0\right] + 2\beta_1 . [1]$$

ed il calcolo che dovrà farsi per dedurre φ' dai tre elementi dati ζ, λ', ϖ si potra disporre nel modo seguente

1) $$\operatorname{tang} F' = \frac{\operatorname{sen} \varpi + \operatorname{sen} \lambda' \operatorname{tang} \zeta \cos \varpi}{\cos \lambda' \operatorname{tang} \zeta}$$

2) $$A = \frac{\cos F'^2 (\cos \varpi - \operatorname{sen} \lambda' \operatorname{tang} \zeta \operatorname{sen} \varpi)}{\cos \lambda' \operatorname{tang} \zeta}$$

3) $$\operatorname{sen} p' = \operatorname{sen} \zeta \cos \lambda'$$

4) $$\operatorname{sen} V' = \frac{\operatorname{sen} \lambda'}{\cos p'}$$

5) $$\operatorname{sen} V = \frac{\operatorname{sen} F'}{\cos p'}$$

6) $$u = \varpi + \left[\frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{2^4}(1 + \operatorname{sen} p'^2 + 4A \operatorname{cot} F' \operatorname{tang} V)\right](V - V') \operatorname{sen} p'$$
$$+ \frac{e^4}{2^4} \operatorname{sen} p' \cos p'^2 \operatorname{sen} (V - V') \cos (V + V')$$

7) $$\operatorname{tang} \varphi' = \frac{\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} \lambda' \operatorname{tang} \zeta \cos u}{\cos \lambda' \operatorname{tang} \zeta} .$$

SOLUZIONE 2

98. Si troverà in primo luogo, come nella soluzione prima, l' equazione

$$tang\,\varphi' = \frac{sen\,(\varpi + \sigma) + sen\,\lambda'\,tang\,\zeta\,cos\,(\varpi + \sigma)}{cos\,\lambda'\,tang\,\zeta};$$

si farà in seguito $tang\,F' = \frac{sen\,\varpi + sen\,\lambda'\,tang\,\zeta\,cos\,\varpi}{cos\,\lambda'\,tang\,\zeta}$,

ed in oltre

$$\Phi\,\varphi' = \sigma \cdot \frac{d\,.\,tang\,F'}{d\,\varpi} + \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{d^2\,.\,tang\,F'}{d\,\varpi^2} + \frac{\sigma^3}{2.3} \cdot \frac{d^3\,.\,tang\,F'}{d\,\varpi^3} + \text{ec.}$$

cosicchè si avrà l' equazione

$$0 = tang\,F' - tang\,\varphi' + \Phi\,\varphi'$$

Posto pertanto, come nella seconda soluzione del problema quinto,

$$\frac{d\,.\,[(\Phi\varphi')^m\,cos\,\varphi'^2]}{d\,\varphi'} = (\Phi'\,\varphi')^m\,;\quad \frac{d\,.\,[(\Phi'\Phi')^m\,cos\,\varphi'^2]}{d\,\varphi'} = (\Phi''\varphi')^m\,;$$

$$\frac{d\,.\,[(\Phi''\Phi')^m\,cos\,\varphi'^2]}{d\,\varphi'} = (\Phi'''\varphi')^m\,;\ \text{ec. avremo}$$

$$\varphi' = F' + \Phi\,F'\,.\,cos\,F'^2 + \frac{(\Phi'\varphi')^2\,.\,cos\,F'^2}{2} + \frac{(\Phi''\varphi')^3\,.\,cos\,F'^2}{2.3} + \text{ec.}$$

nella qual equazione dopo tutte le differenziazioni si metterà nel secondo membro F' in luogo di φ'. La funzione $\Phi\varphi'$, da cui derivano tutte le altre $(\Phi'\varphi')^2$, $(\Phi''\Phi')^3$, ec. si ottiene facilmente sostituendo in vece di φ

il suo valore (§ 95), ed avvertendo che si ha in generale

$$\frac{d^{2n}.tang\,F'}{d\,\varpi^{2n}} = \pm\, tang\,F'\,;\ \frac{d^{2n+1}.\,tang\,F'}{d\,\varpi^{2n+1}} = \pm\frac{A}{cos\,F'^2}$$

nelle quali espressioni ha luogo il segno superiore quando n è numero pari, e l'inferiore quando n è dispari.

99. Il valore immediato di φ' si può ottenere più brevemente dalla soluzione prima col metodo sopra (§ 76) accennato. In fatti supponendo (§§ 95, 96)

$$\mu = \beta_0.(V-V') + 2\beta_1.[1] \quad + 2\,\beta_2.[2] \quad + \text{ec.}$$
$$+ a\,\beta^2{}_0.(V-V') + 2a\beta_0\beta_1([1]+(V-V')cos\,2V)$$
$$+\frac{1}{2}\beta^3{}_0.(V-V')\Big[2a+b(V-V')\Big]$$

e per conseguenza $u = \varpi + \mu$, egli è evidente che F' si cangia in φ' quando in F' si sostituisce $\varpi + \mu$ in luogo di ϖ; quindi si avrà, adottando i valori di A, B, C ec. sopra (§ 96) determinati,

$$\varphi' = F' + \mu\,.\,A + \mu^2.\frac{B}{2} + \mu^3.\frac{C}{2.3} + \text{ec.}$$

Nel caso che si negligentino la sesta e le più alte potenze dell' eccentricità, ne risulta

$$\varphi' = F' + \left[\frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{2^4}(1 + sen\,p'^2)\right]A(V-V') + \frac{e^4}{2^4}A\,sen\,p'\,cos\,p'^2.[1]$$
$$+\frac{e^4}{2^3}B(V-V')^2\,sen\,p'^2 + \frac{e^4}{2^2}A^2(V-V')\,sen\,p'\,cot\,F'\,tang\,V$$

Le quantità F', A, p', V', V si calcolano colle pre-

cedenti (§ 97) formole, e B si avrà (§ 96) dalla formola

$$B = -\operatorname{sen} F' \cos F' - 2 A^2 \operatorname{tang} F'$$

100. Tralasciando ancora la quarta potenza dell'eccentricità, avremo $\varphi' = F' + \frac{e^2}{2} . A (V - V') \operatorname{sen} p'$.

Se si vuol rendere questa formola indipendente dalla sfera inscritta, bisognerà calcolare un angolo F tale che si abbia $\operatorname{tang} F = \frac{\operatorname{sen} \varpi + \operatorname{sen} \lambda \operatorname{tang} \zeta \cos \varpi}{\cos \lambda \operatorname{tang} \zeta}$. Ma F diventa F' quando in luogo di λ si mette $\lambda' = \lambda - \frac{e^2}{2^2} \operatorname{sen} 2 \lambda$ (§ 33). Avremo pertanto

$$F' = F - \frac{e^2}{2^2} \cdot \left(\frac{dF}{d\lambda}\right) \operatorname{sen} 2\lambda = F - \frac{e^2}{2^2} \left(\operatorname{sen} 2\lambda \cos F^2 \cos \varpi + \operatorname{sen} \lambda^2 \operatorname{sen} 2F\right)$$

Si ha pure $\varphi' = \varphi - \frac{e^2}{2^2} \operatorname{sen} 2 \varphi = \varphi - \frac{e^2}{2^2} \operatorname{sen} 2 F$.

Laonde cangiando p' in p, $V - V'$ in $v - v'$, e facendo $A = \frac{dF}{d\varpi}$; ne risulterà l'equazione

$$\varphi = F + \frac{e^2}{2^2} \left[\operatorname{sen} 2 F - M + 2 A (v - v') \operatorname{sen} p \right]$$

nella quale è $\operatorname{sen} p = \operatorname{sen} \zeta \cos \lambda$; $\operatorname{sen} v' = \frac{\operatorname{sen} \lambda}{\cos p}$;

$$\operatorname{tang} F = \frac{\operatorname{sen} \varpi + \operatorname{sen} \lambda \operatorname{tang} \zeta \cos \varpi}{\cos \lambda \operatorname{tang} \zeta} ; A = \frac{\cos F^2 (\cos \varpi - \operatorname{sen} \lambda \operatorname{tang} \zeta \operatorname{sen} \varpi)}{\cos \lambda \operatorname{tang} \zeta} ;$$

$$sen\,\upsilon = \frac{sen\,F}{cos\,p}\,;\quad M = sen\,2\,\lambda\,cos\,F^2\,cos\,\varpi + sen\,\lambda^2\,sen\,2\,F\,.$$

101. Dal valore primitivo di ϖ trovato sopra (§§ 25, 27) si ricava un'altra espressione di φ indipendente dalla sfera inscritta. In fatti, ritenendo solamente il quadrato dell'eccentricità, e mettendo per brevità

$$\Sigma = \frac{e^2}{2}\,sen\,p\left(\upsilon - \upsilon' + \frac{sen\,(\upsilon - \upsilon')\,cos\,\upsilon'}{cos\,\upsilon}\right)$$

si avrà $\varpi + \Sigma = z - z'$; e quindi sarà

$$tang\,(\varpi + \Sigma) = \frac{sen\,p\,(tang\,\upsilon - tang\,\upsilon')}{1 + sen\,p^2\,tang\,\upsilon\,tang\,\upsilon'}\,,$$ ed essendo

$$tang\,\upsilon = \frac{sen\,\Phi}{\sqrt{(cos\,p^2 - sen\,\Phi^2)}}\,;\quad tang\,\upsilon' = \frac{tang\,\lambda}{cos\,\zeta}\,,$$ si dedurrà come sopra (§ 95)

$$tang\,\Phi = \frac{sen\,(\varpi + \Sigma) + sen\,\lambda\,tang\,\zeta\,cos\,(\varpi + \Sigma)}{cos\,\lambda\,tang\,\zeta}$$

Dunque, facendo $tang\,F = \frac{sen\,\varpi + sen\,\lambda\,tang\,\zeta\,cos\,\varpi}{cos\,\lambda\,tang\,\zeta}$,

avremo $tang\,\Phi = tang\,F + \Sigma\,.\,\frac{d\,.\,tang\,F}{d\,\varpi}$ vale a dire,

posto $A = \frac{d\,F}{d\,\varpi}$,

$$\Phi = F + \frac{e^2}{2}\,A\,sen\,p\left(\upsilon - \upsilon' + \frac{sen\,(\upsilon - \upsilon')\,cos\,\upsilon'}{cos\,\upsilon}\right)$$

la qual espressione è alquanto più semplice della precedente (§ 100).

102. Quando l'angolo ζ è retto, si ottiene la soluzione del problema anche dall'equazione (XIII), la quale è indipendente dalla sfera inscritta. Ponghiamo per brevità

$$\eta = B_0 . \psi + B_1 . sen\, 2\psi + B_2 . sen\, 4\psi + \text{ec.}$$

la detta equazione diventerà $z = 90^\circ - \varpi - \eta$. Quindi avremo $tang\, z = cos\, \lambda\, cot\, \psi = cot\, (\varpi + \eta)$. Ma essendo

$$cos\, \psi = sen\, \upsilon = \frac{sen\, \Phi}{sen\, \lambda}, \text{ si ha } cot\, \psi = \frac{sen\, \Phi}{\sqrt{(sen\, \lambda^2 - sen\, \Phi^2)}};$$

dunque $cot\, (\varpi + \eta) = \dfrac{cos\, \lambda\, sen\, \Phi}{\sqrt{(sen\, \lambda^2 - sen\, \Phi^2)}}$ da cui si deduce

$cos\, (\varpi + \eta) = cot\, \lambda\, tang\, \Phi$, o sia $tang\, \Phi = tang\, \lambda\, cos\, (\varpi + \eta)$. Ora se noi facciamo $u = \varpi + \eta$ col metodo sopra (§§ 95, 96) usato, troveremo il valore di u nel caso di $\zeta = 90^\circ$ espresso per mezzo dei due elementi λ, ϖ: oppure, attesa l'analogia delle due equazioni XIII, XVI, basterà nella soluzione data sopra (§ 96) cangiare β, $V - V'$, $2\,[i]$, $cos\, 2\, i\, V$ rispettivamente in B, ψ', $sen\, 2\, i\, \psi'$, $cos\, 2\, i\, \psi'$; in tale maniera si avrà

$$u = \varpi + B_0 . \psi' + B_1 . sen\, 2\psi' + B_2 . sen\, 4\psi'$$

$$+ a\, B^2_0 . \psi' \quad + a\, B_0\, B_1\, (sen\, 2\psi' + 2\psi' cos\, 2\psi')$$

$$+ \frac{1}{2} B^3_0\, (2\, a^2 \psi' + b\, \psi'^2)$$

$$+ B_3 . sen\, 6\psi' \quad . \quad .$$

$$+ a \left[2\, B^2_1\, sen\, 2\psi' cos\, 2\psi' + B_0\, B_2\, (sen\, 4\psi' + 4\psi' cos\, 4\psi') \right]$$

$$+B^2_{\,0}B_1\left[a^2(sen\,2\psi'+4\psi'\cos 2\psi'-2\psi'^2 sen\,2\psi')+b(\psi' sen\,2\psi'+\psi'^2\cos 2\psi')\right]$$

$$+\frac{1}{6}B^3_{\,0}\left[6a^3\psi'+9ab\psi'^2+c\psi'^3\right]$$

nella qual espressione è

1) $tang\,f = tang\,\lambda\cos\varpi$

2) $\cos\psi' = \frac{sen\,f}{sen\,\lambda}$; ovvero $tang\,\psi' = \cos\lambda\,tang\,\varpi$

3) $a = \frac{d\psi'}{d\varpi} = \frac{\cos f^2}{\cos\lambda}$

4) $b = \frac{d^2\psi'}{d\varpi^2} = \frac{tang\,\lambda^2\cos f^4 sen\,2\varpi}{\cos\lambda}$

5) $c = \frac{d^3\psi'}{d\varpi^3} = \frac{2\,tang\,\lambda^2\cos f^4}{\cos\lambda}.(1-2\cos 2f\,sen\,\varpi^2)$

ed i coefficienti B_0, B_1, B_2, B_3, che sono funzioni dell' eccentricità e della latitudine λ, si otterranno facilmente dalle formole sopra (§ 70) esposte. Dal valore poi di u si dedurrà quello della latitudine cercata ϕ mediante l' equazione

$tang\,\phi = tang\,\lambda\cos u$.

103. Rappresentiamo con μ la somma de' termini dipendenti dall' angolo ψ' nel valore precedente di u. Si avrà $u = \varpi + \mu$. Ora siccome l'arco f diventa ϕ quando si mette $\varpi+\mu$ in luogo di ϖ, ne segue (§ 76)

$$\phi = f + \mu.\frac{df}{d\varpi} + \frac{\mu^2}{2}.\frac{d^2 f}{d\varpi^2} + \frac{u^3}{2.3}.\frac{d^3 f}{d\varpi^3} + \text{ec.}$$

ed essendo $tang\,f = tang\,\lambda\cos\varpi$, ne risulterà

$$\frac{df}{d\varpi} = -\operatorname{sen} f \cos f \operatorname{tang} \varpi$$

$$\frac{d^2 f}{d\varpi^2} = -\operatorname{sen} f \cos f (1 + 2 \operatorname{sen} f^2 \operatorname{tang} \varpi^2)$$

$$\frac{d^3 f}{d\varpi^3} = \operatorname{sen} f \cos f \operatorname{tang} \varpi \left[1 - 6 \operatorname{sen} f^2 + 2 \operatorname{sen} f^2 \operatorname{tang} \varpi^2 (1 - 4 \operatorname{sen} f^2) \right]$$

ec.

Nell' ipotesi che si negligentino la sesta e le più alte potenze dell' eccentricità, avremo (§ 70)

$$B_0 = \frac{e^2}{2} \cos\lambda + \frac{e^4}{2^4} \cos\lambda (2 + 3 \operatorname{sen} \lambda^2); \; B_1 = \frac{3}{2^5} e^4 \cos\lambda \operatorname{sen} \lambda^2;$$

quindi ne verrà

$$\mu = \left[\frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{2^4} (2 + 3 \cos\lambda^2 + 4 \cos f^2) \right] \psi' \cos\lambda + \frac{3 e^4}{2^5} \cos\lambda \operatorname{sen} \lambda^2 \operatorname{sen} 2\psi'$$

$$\frac{\mu^2}{2} = \frac{e^4}{2^3} \cdot \psi'^2 \cos\lambda^2$$

e la cercata latitudine ϕ nel caso di $\zeta = 90^\circ$ sarà

$$\phi = f - \left[\frac{e^2}{2^2} + \frac{e^4}{2^5} (2 + 3 \cos\lambda^2 + 4 \cos f^2) \right] \psi' \operatorname{tang} \varpi \cos\lambda \operatorname{sen} 2f$$

$$- \frac{3 e^4}{2^6} \operatorname{sen} \lambda^2 \cos\lambda \operatorname{tang} \varpi \operatorname{sen} 2f \operatorname{sen} 2\psi' - \frac{e^4}{2^4} \cdot \psi'^2 \cos\lambda^2 \cos 2f (1 + 2 \operatorname{sen} f^2 \operatorname{tang} \varpi^2)$$

nella qual equazione gli archi f, ψ' si determinano colle due formole

$$\operatorname{tang} f = \operatorname{tang} \lambda \cos \varpi; \; \operatorname{tang} \psi' = \cos \lambda \operatorname{tang} \varpi.$$

Il fine di questi elementi sarà dato in un altro volume.

SUL CONDUTTORE TAGLIENTE

D' HAWKINS

per l' estrazione della pietra dalla vescica.

Di Antonio Scarpa

presentata a' 31 di gennajo 1807.

Se dovendo estrarre una grossa pietra dalla vescica orinaria d'un uomo per la via del perineo, potesse il chirurgo a suo piacimento proporzionare la lunghezza e profondità del taglio della prostata, non che dell' orificio, e del corpo della vescica al volume della pietra, egli potrebbe in ogni qualunque caso di calcolo assai voluminoso aprirsi una strada bastantemente ampia per afferrare prontamente la pietra ed estrarla con facilità, senza punto ammaccare o lacerare le parti per le quali dovesse passare. Ma sgraziatamente, quando trattasi di pietra assai voluminosa, ciò non è praticabile nel perineo, a motivo che limitato è lo spazio triangolare fra l'arcata del pube, il ramo dell' ischio, ed il collo della vescica, e che l'incisione della base della prostata, e dell'orificio della vescica non può essere prolungata oltre certi confini, senza dar occasione che si

formino infiltrazioni orinose, e suppurazioni gangrenose nel tessuto cellulare posto fra il retto intestino, e la vescica.

Che il Rawio, per estrarre senza il più picciolo stento delle grosse pietre dalla vescica per la via del perineo, incidesse con felice successo tant' alto il corpo della vescica da lasciare intatto l' orificio di questo viscere, fu una congettura di Albino, non appoggiata sopra alcun fatto certo e dimostrato. E tutti quelli i quali conoscono la storia della chirurgia sanno in quanto discredito siano caduti ben presto i metodi di Foubert, e di Thomas aventi il medesimo scopo; nè ignorano, che per lo più è susseguita da gravissimi accidenti la litotomia celsiana, ogni qual volta il calcolo è di tal grossezza, che non può imboccare, e distendere l' orificio della vescica, ed il collo dell' uretra (*a*), sicchè per estrarlo l'incisione debba cadere sulla parte laterale sinistra del corpo della vescica, superiormente alla prostata. Tutto ciò che la notomia ha saputo sin ora suggerire di meglio ai chirurghi, onde agevolare loro l'estrazione di grossi calcoli dalla vescica per la via del perineo, si è l'incisione della prostata lateralmente entro certi determinati confini di lunghezza e di profondità, e la prudente risoluzione di commettere il resto dell'o-

---

(*a*) Ella è un' inesattezza dei chirurghi, non degli anatomici scrittori diligenti quella di chiamare collo, o cervice della vescica ciò che è propriamente *collo*, o *principio dell' uretra*, il quale si estende dall' orificio della vescica per entro della prostata al cominciamento dell' uretra membranosa, ed il quale in niun modo appartiene alla vescica. Codesta inesattezza dà occasione tratto tratto a molte oscurità nella descrizione della litotomia.

perazione ad una blanda e graduata dilatazione del collo dell' uretra, e dell' orificio della vescica. E per verità, dacchè l' operazione della litotomìa nel perineo ha ricevuto codesto perfezionamento, ossia dacchè si è cominciato dai chirurghi non più ad intaccare soltanto l'apice della prostata, ma ad aprirlo completamente, ed a tagliare a certa profondità, ma non completamente, la base di questa dura ghiandola, e con essa un picciolo tratto dell'orificio della vescica, la forza di distensione, che per lo passato, praticando il *grande apparecchio* s' impiegava violentissima per potere afferrare ed estrarre la pietra, non è stata più necessaria, e basta ora all' uopo una mediocre dilatazione di queste parti per estrarre con felice successo dei calcoli di considerevole grossezza, siccome sono quelli di tre once e mezza di peso, e di sedici linee di picciol diametro; ond' è che a giusto titolo a' dì nostri si riguarda il *grande apparecchio lateralizzato* come il maggior grado di perfezione cui può essere portata l' operazione della litotomìa nel perineo.

Il taglio laterale, ancorchè eseguito colla più grande precisione, non dispensa il chirurgo dall' impiegare un certo grado di dilatazione dell' orificio della vescica e del collo dell' uretra. Codesta dilatazione, per mediocre che sia, è sempre necessaria, quantunque il calcolo sia di mezzana grossezza. L'orificio della vescica nel cadavere d'un uomo adulto si apre, egli è vero, quasi spontaneamente al diametro di cinque linee, come si può vedere portando l' apice del dito dalla cavità della vescica per entro il collo dell' uretra. Il taglio laterale entro i giusti confini fende il corpo, e la base

della prostata alla profondità di quattro, al più di cinque linee, le quali unite a cinque altre cui si presta, come si è detto, quasi spontaneamente l' orificio della vescica, formano un'apertura di dieci linee; ma in un uomo adulto la pietra d' ordinario volume, e di figura ovale ha sedici linee di picciol diametro, alle quali conviene aggiungere la grossezza delle morse della tanaglia, nel qual caso, anco dopo il taglio laterale praticato colla più scrupolosa precisione, la pietra, benchè di mediocre grossezza, non potrà uscire dalla vescica, se la dilatazione della base della prostata, e dell'orificio della vescica non verrà portata per otto linee circa al di là dell' apertura fatta dal taglio laterale. Che se per evitare codesta distensione per otto linee s' incidessero ad eguale profondità la base della prostata, ed insieme con essa l' orificio della vescica, ed una porzione del suo corpo, non mancherebbe ciò di dar luogo alla filtrazione orinosa nel tessuto cellulare fra il retto intestino, e la vescica, indi agli ascessi gangrenosi, alle fistole, ed altri gravi accidenti. Sappiamo in fatti da Sharp *(b)* che Cheselden ne' primi suoi sperimenti incideva porzione del corpo di questo viscere; ma Sharp del pari c' instruisce, che Cheselden fu obbligato di smettere questa maniera di operare a cagione del danno che ne veniva appunto dall' infiltrazione dell' orina fra il retto intestino, e la vescica (*). La stessa cosa

(b) Ricerche critiche. Cap. V.

(*) Cheseldenus, ut omnia tentaret, vesicam aqua hordei implebat, quantum aegri ferre poterant; dein vesicam incidebat, sed infausto successu, propter urinam inter vesicam et partes vicinas remorantem, unde gangraena qua *ex decem, octo moriebantur*. Camper *Demonstrat. anat.* lib. II. pag. 14.

è stata pure avvertita da Bromfeild *(c)*, e dopo di esso da parecchj altri celebri ed esercitati chirurghi *(d)*. La lunga sperienza aveva senza dubbio instruito il più rinomato Litotomo de' suoi tempi Franco *(e)* sui danni d' una troppo estesa e profonda incisione della base della prostata, e dell' orificio della vescica, poichè, a questo proposito egli scrisse *bref il est requis de tenir mediocrité*. L' apice della prostata, siccome quello che oppone la più valida resistenza all' introduzione della tanaglia ed all' estrazione della pietra, si è quello che in ogni operazione di litotomia nel perineo deve essere completamente reciso. Ma per riguardo al corpo ed alla base della prostata, un' incisione laterale la quale vada alla profondità di cinque linee per tutta la lunghezza di questa ghiandola, e quindi interessi alcun poco l'o-

---

(c) Chirurg. Obs. Licet plerique chirurgi, quod sciam, glandulam prostatam per totam suam crassitiem dividere optent, ego tamen nollem factum. Dodrantem, aut paulo minus proxime ad partem urethrae membranosam satius et utilius, quam per totam sui crassitudinem dividi pro certo habeo. Nam primo nullibi alias praeter quam in ea parte calculo obsistitur, et vesicae cervix citra omnem lacerationem sufficienter dilatatur. Deinde partibus citius sanandi facultatem hoc fortasse dabit, sphincter revalescente, quam si perpetuo per eas transiret urina: licetque mihi, si foret opus, liquido jurare, nunquam post ullam mearum operationum fistulam remansisse, quod saepe usu evenit illis qui glandulam usque ad membranosam vesicae partem persecuerunt. Nam, tametsi aliter visum sit multis scriptoribus, fateor tamen, me non posse non putare valde perniciosum esse partem membranosam vesicae sauciari, et si nihil aliud affert mali, fistulas exinde orituras maxime est verosimile.

(d) L' aforismo d' Ippocrate XVII. sec. VI. sulla letalità delle ferite della vescica è una verità di fatto relativamente alle ferite di questo viscere, che non lasciano un libero esito all' orina, e ne occasionano l' effusione nel cavo del peritoneo, ovvero nella cellulosa fra il retto intestino, e la vescica offesa.

(e) Traité de la taille. Chap. 32.

rificio della vescica, è bastante perchè coll' ajuto di una moderata e gradatamente accresciuta dilatazione si possa estrarre una pietra più che d' ordinaria grossezza, senza che le parti per le quali deve passare, vengano fortemente contuse o lacerate. Nei fanciulli nei quali l' orificio della vescica, e la base della prostata sono facilmente distensibili, e nei vecchj nei quali generalmente l' orificio della vescica, ed il collo dell' uretra è assai più largo che negli adulti, una incisione del corpo, e della base della prostata minore di cinque linee di profondità, e ne' fanciulli di due linee soltanto, è bastante per l' estrazione della pietra d' ordinaria grossezza, mediante una mediocre dilatazione di queste parti. Non è propriamente che il grosso calcolo, il quale oltrepassi le venti linee di piccolo diametro, che obblighi a tagliare lateralmente tutta la spessezza della base della prostata sin a penetrare nella cellulosa al di là di questa ghiandola, e nel corpo della vescica; ma poichè codesta profonda incisione laterale è susseguita costantemente da infiltrazioni orinose, da ascessi gangrenosi, e da fistole fra la vescica, ed il retto intestino, così egli è dimostrato che i calcoli di tale grossezza non devono giammai venire estratti per la via del perineo.

Il taglio laterale ha dunque dei confini, oltre i quali non si può far passare senza esporre il malato a danni più gravi di quelli che gli possono sovrastare dalla presenza della pietra in vescica. Questo fatto unitamente a quello che ne deriva qual conseguenza, ossia della necessità assoluta di dover impiegare in ogni qualunque caso di litotomia nel perineo, un minore, o

maggior grado di dilatazione dell' orificio della vescica, e della base della prostata, onde supplire alla mancanza di lunghezza e di profondità del taglio di queste parti anche il meglio praticato, costituisce, a mio avviso, il principio fondamentale della litotomìa col metodo *laterale*, e somministra una norma certa onde dare il giusto valore agli ormai innumerabili stromenti stati proposti per l' esecuzione pronta e sicura di questa operazione. Su di che non posso passare sotto silenzio che hanno indotto in errore la studiosa gioventù tutti quelli, i quali declinando dalla dottrina di le Cat (*), ed esagerando di troppo i vantaggi del taglio laterale sopra il grande apparecchio, e più ancora l' utilità degli stromenti da essi proposti per eseguirlo, ne hanno parlato in modo, come se, dopo fatto il taglio laterale, la pietra fosse per uscire spontaneamente dalla vescica, senza punto menzionare la necessità della dilatazione.

Cheselden, al quale solo appartiene la gloria d' aver arricchito la chirurgìa dell' importante ritrovato del grande apparecchio lateralizzato, adoprava per fare questa operazione un coltellino di sua invenzione, avente un tagliente convesso largo quattro linee, montato sopra un lungo manico. Con questo semplicissimo stromento egli incideva lateralmente la prostata per tutta la sua lunghezza, ed alla profondità di quattro o cinque linee; dopo di che, coll' ajuto d' una lenta e gradatamente accresciuta dilatazione del collo dell' uretra, e

(*) Pièces concernant l' opération de la taille pag. 60. 100.

dell' orifizio della vescica egli estraeva dei grossi calcoli senza esporre i malati a gravi accidenti consecutivi. Ma per verità non è cosa tanto facile, come alcuno non abbastanza esercitato in questa operazione potrebbe forse immaginare, il condurre un coltello per entro del collo dell' uretra sin al di là dell' orificio della vescica, sicchè nel tragitto che deve percorrere non si scosti, talvolta molto, dalla direzione laterale alla prostata, ed incida la prostata stessa alla giusta profondità specialmente nella sua base colla quale circonda l' orificio della vescica. Imperciocchè la punta del coltello si arresta facilmente nella scannellatura del catetere fatto di ferro tenero, e la dura sostanza della prostata oppone d' ordinario una sì forte resistenza al tagliente, che lo ripercuote nel lato opposto, ovvero sfugge la prostata stessa innanzi al tagliente, e fa supporre al chirurgo d' avere inciso abbastanza profondamente questo corpo ghiandolare quando non lo ha spaccato propriamente che nel suo apice, e scalfitto soltanto leggiermente nel suo corpo e nella sua base.

Il facilitare quindi ai dotti chirurghi, ma non egualmente abili di mano, quanto lo era Cheselden, l' esecuzione del taglio laterale, fu il lodevole motivo che indusse Hawkins a proporre il suo conduttore tagliente. Opinò egli che due grandi vantaggi sarebbero derivati dalla pratica di questo suo stromento; quello cioè di eseguire invariabilmente il taglio laterale di Cheselden; l' altro di garantire costantemente i malati in tutto il corso dell' operazione dall' offesa del retto intestino, e dell' arteria pudenda profonda. Non si può mettere in controversia l' utilità enunciata in secondo

luogo; poichè egli è evidente, che la convessità della guida dello stromento mette a coperto l' intestino retto da ogni lesione, e che il margine tagliente del medesimo stromento non essendo inclinato orizzontalmente verso la tuberosità e ramo dell' ischio, ma voltato all' insù, nel percorrere che fa l' asse longitudinale del collo dell' uretra, non può offendere l' arteria pudenda profonda. Ma quanto al primo vantaggio, quello cioè di eseguire precisamente il taglio laterale di Cheselden, è d' uopo convenire, che Hawkins non ha ottenuto completamente l' intento che si era proposto, sì perchè il margine tagliente del suo conduttore non si alza abbastanza sopra il livello del catetere per immergersi quanto si richiede nella sostanza del corpo e della base della prostata, e quindi incidere l' uno e l' altra alla giusta profondità, come perchè lo stesso margine tagliente troppo rivolto all' insù, per quel tratto che può incidere il corpo, e la base della prostata, non la intacca lateralmente, ma piuttosto nella parte sua superiore colla quale riguarda la sommità del ramo dell' ischio, e l' arco del pube; la qual via è la più ristretta ed impedita di tutte le altre nel perineo per l' uscita della pietra dalla vescica. Inoltre la larghezza dell' apice della guida è così sproporzionata al calibro dell' uretra membranosa, che per la grande resistenza che vi incontra, egli è facile che lo stromento esca dal solco del catetere, e s' insinui tra la vescica ed il retto intestino, il quale grave incidente è accaduto assai spesso, ancorchè lo stromento di cui si parla fosse adoprato da mani esercitate nelle grandi operazioni di chirurgia.

Pochi anni fa alcuni celebri chirurghi avevano in-

trapreso di dare una nuova forma al conduttore tagliente d' Hawkins, ma i loro tentativi non ebbero buon successo a motivo, io credo, che essi hanno trascurato d'instituire un esatto confronto fra le parti che si devono incidere nella litotomia di Cheselden, colla elevatezza ed inclinazione da darsi al tagliente dello stromento che essi si proponevano di perfezionare. Bell *(f)* ha diminuita la larghezza della guida, ma ha dato al tagliente una direzione orizzontale. Dessault *(g)*, Kline, Cruikshankes, ritenuta la posizione orizzontale della lama tagliente, hanno di nuovo allargata la guida, e resa piana di solcata che era *(h)*, che è quanto dire, essi non hanno fatto altro, che convertire il conduttore tagliente d'Hawkins in un coltello meno appropriato di quanti ne ha la chirurgia per fare il taglio laterale, e certamente in niun conto più sicuro e più maneggevole di quello che adoprava il Cheselden. Non è sfuggita, a dir vero, ai sopra citati chirurghi la difficoltà, che la direzione orizzontale del tagliente avrebbe resa inevitabile l' offesa dell' arteria pudenda profonda; ed è perciò che essi hanno inse-

---

(f) System of surgery T. II. Plate XIII.

(g) Oeuvres chirurg. T. II.

(h) Richerand *mém. de la soc. d'émulat.* T. IV. Le procédé d'Hawkins est celui avec le quel on évite plus sûrement l' hémorragie, pourvû toute fois que l' on se serve du gorgéret de l' inventeur; le tranchant de l' instrument tourné en haut ne peut intéresser les vaisseaux du périnée. On pourroit les ouvrir si l'on fesoit usage du gorgéret corrigé par Dessault, ou par Kline. Les changemens que ces chirurgiens ont fait subir à l'instrument d'Hawkins, bien loin d'avoir ajouté à sa perfection, l'ont au contraire privé de tous ses avantages. Deschamps *journ. de med.* T. XX. Nous avons vû le gorgéret d'Hawkins, que l'anglomanie voulait à force préconiser, subir tant et tant de corrections, que d'un gorgéret on en a fait une lame plate et tranchante, dont on ne se sert plus.

gnato doversi inclinare il manico del catetere solcato sull' inguine destro del malato, e che si facesse scorrere lunghesso il conduttor tagliente pure inclinato in modo, che col suo margine ottuso riguardasse il retto intestino, e colla lama tagliente si allontanasse di tanto dalla tuberosità e dal ramo dell' ischio quanto fosse di bisogno per non ferire l' arteria pudenda profonda. Certamente anche adoprando il coltello di Cheselden convien dare la stessa inclinazione al catetere solcato verso l' inguine destro del malato, affinchè il taglio cada lateralmente sulla prostata, e non discenda sul retto intestino, o offenda l'arteria pudenda; ma chiunque ha della sperienza in simili cose sa quanto sia difficile il dare un giusto grado d' inclinazione al catetere solcato, e non ignora quanto codesta inclinazione sia arbitraria, instabile, incomoda per l'operatore in confronto di quella, in cui il manico del catetere solcato è tenuto in linea perpendicolare al corpo del malato, e la concavità del catetere medesimo si trovi di contro l' arcata del pube; dalla quale stabilità del catetere dipende la sicurezza e la precisione del taglio laterale.

Paragonando dunque diligentemente lo stromento d'Hawkins quale fu proposto dal suo autore colle parti che si devono incidere ed insiememente colla direzione, estensione, e profondità dell' incisione che si richiede nel grande apparecchio lateralizzato, ho trovato che i difetti di questo stromento consistevano nella eccedente larghezza della guida, specialmente nel suo apice; nella mancanza di sufficiente elevatezza della lama tagliente sopra il livello del solco del catetere, e nella inclinazione non esatta del tagliente all'asse del collo dell'u-

retra e della prostata. Il calibro del collo dell' uretra in un uomo fra i trenta e quarant' anni ha tre linee soltanto di diametro nell' apice della prostata; quattro linee nella sua metà; e cinque in vicinanza dell' orificio della vescica. La grossezza o spessezza della prostata nel suo apice è di due linee poco più; di quattro quella del suo corpo; e di sei, talvolta di otto quella della sua base colla quale circonda l' orificio della vescica. Nell' adulto di mezzana statura dai diciotto ai venticinque anni la spessezza della base della prostata è minore di due linee circa paragonata con quella d' un uomo di quarant' anni e di grande corporatura. La linea precisa, che deve tenere il taglio laterale della prostata d' un uomo adulto, si trova essere inclinata all' asse longitudinale del collo dell' uretra, e della stessa prostata sotto un angolo di 69 gradi. Ora dietro questi principj dedotti dalla struttura delle parti accennate, la guida del conduttore tagliente d' Hawkins, che quì riproduco *(i)*, non ha che quattro linee di larghezza e due di profondità, la qual larghezza decresce nel beccuccio *(k)*. Il margine tagliente dello stromento è un bisturino retto in vicinanza della sua punta, ma che gradatamente si fa rilevato e convesso al disopra del livello del catetere solcato, sicchè nella massima sua convessità *(l)* ha sette linee di larghezza. L' inclinazione in fine della lama tagliente all' asse longitudinale della gui-

---

(i) Fig. I. *a. a.*
(k) *c.*
(l) *d. e.*

da è esattamente sotto un angolo di 69 gradi, che è quanto dire la stessa di quella che ha il lato sinistro della prostata all'asse longitudinale del collo dell' uretra.

E quanto al modo d'adoprare questo stromento, egli è come segue. Introdotto in vescica il catetere solcato, la di cui curvatura corrisponda esattamente a quella dell' asse del collo dell' uretra, e della prostata, ed il di cui becco sia alquanto più lungo di quello del catetere solcato ordinario, sicchè penetri in vescica pel tratto d' un pollice e mezzo, e fatta nel modo consueto l' incisione esterna e quella dell'uretra membranosa, non toccando punto al *bulbo*, il chirurgo colla mano sinistra terrà ben fermo il catetere solcato in linea perpendicolare al corpo del malato, e d' incontro l'arcata del pube; poscia colla mano destra preso il conduttor tagliente, ed inserito il beccuccio di esso nella scannellatura del catetere, sicchè la convessità della guida sia direttamente soprapposta al retto intestino, farà scorrere il conduttore tagliente per una linea quanto più potrà parallela alla estremità orizzontale del catetere situata in vescica, nè si arresterà finchè non avrà sentito che il beccuccio del conduttore sarà pervenuto all' estremità chiusa della scannellatura del catetere. Dopo di ciò ritirerà il catetere dalla vescica e dall' uretra; e dietro la guida del conduttore tagliente introdurrà la tanaglia; e rasente questa, tirerà a se dolcemente lo stromento tagliente, estraendolo nella stessa direzione colla quale sarà stato introdotto. In fine, conosciuta per mezzo della tanaglia la posizione della pietra, ne allargherà dolcemente le morse, e con esse dilaterà gradatamente il collo dell' uretra e l' orificio della vescica sin a tanto da poter afferrare con fa-

cilità il calcolo ed estrarlo, senza ammaccare o lacerare le parti per le quali dovrà passare.

E' cosa certa e confermata da replicate osservazioni e misure da me prese sul cadavere d'uomini adulti, che una linea inclinata all'asse del collo dell'uretra e della prostata sotto un angolo di 69 gradi corre lateralmente pel corpo e per la base di questa ghiandola nel luogo più opportuno di tutti gli altri per l'estrazione della pietra nel perineo, che è quanto dire non troppo verso l'arcata del pube, nè verso la faccia inferiore e posteriore della prostata *(m)*. E poichè la lama tagliente del conduttore si trova appunto inclinata all'asse longitudinale della guida sotto il medesimo angolo, tenuta che sia la guida nella stessa direzione, che ha naturalmente l'asse del collo dell'uretra e della prostata, ne deve seguire per meccanica necessità, che nello spingere in vescica lo strumento in linea quanto più sia possibile parallela alla scannellatura orizzontale del catetere solcato, tutta la prostata coll'orificio della vescica venga tagliata lateralmente e nel luogo più opportu-

---

(m) La prostata nella sua faccia anteriore è più breve che nella posteriore; ed il collo dell'uretra non passa propriamente per il centro di questa ghiandola, ma per quella porzione di essa che è più vicina all'arcata del pube. Per la qual cosa, avuto rignardo alla maggior brevità del collo dell'uretra, ed alla minore spessezza della sostanza della prostata, la via più corta dall'uretra membranosa al cavo della vescica sarebbe per la faccia anteriore della prostata; ma poichè l'incisione fatta in quella minor porzione della prostata caderebbe immediatamente sotto l'arcata del pube la quale opporrebbe un grande ostacolo all'uscita della pietra, così il taglio laterale, ancorchè scorra per la maggior lunghezza, e spessezza del corpo e della base della prostata, sarà sempre da preferirsi al taglio anteriore della medesima ghiandola.

no per l'estrazione della pietra (*). Tenendo il catetere solcato in linea perpendicolare al corpo del malato, e fermo contro l'arcata del pube, sicchè la guida dello stromento riguardi colla sua convessità il retto intestino, e scorra esattamente lungo l'asse del collo dell'uretra e della prostata, si ha una norma certa perchè il tagliente sotto un angolo già determinato non fenda altrimenti che lateralmente la prostata nel luogo più vantaggioso per l'estrazione del calcolo; la qual norma è tanto più facile da determinarsi, e più sicura da ritenersi, quanto che il catetere solcato si nicchia, per così dire, da se sotto l'arco del pube, e che di tutte le posizioni che gli si può dare, questa è la più comoda per il chirurgo, e la più stabile durante l'operazione.

Per ciò che riguarda la profondità del taglio, egli è da rimarcarsi, che la guida dello stromento di cui si parla, ha quattro linee di larghezza, e due di profondità; e che la lama tagliente del medesimo, per un uomo fra i trenta e quaranta anni di grande corporatura, nella maggior sua convessità ha sette linee di larghezza. Nell'atto che il conduttore tagliente si impegna nell'uretra membranosa, e nell'apice della prostata, il qual canale è di tre linee di diametro, il fendente taglia completamente l'apice della prostata per tutta la sua spessezza, che è di due linee poco più. Successivamente, scorrendo il conduttore tagliente per l'asse del collo dell'uretra, cui corrisponde lateralmente il corpo,

(*) Quindi nella costruzione dello stromento si richiede una non ordinaria intelligenza e accuratezza per parte dell'artista.

e la base della prostata, il primo della spessezza di quattro linee, l'altra di sei, talvolta di otto, la guida dello stromento entra in un canale di quattro linee di diametro, che è quanto dire della larghezza della guida stessa. Ivi il tagliente ripercosso dalla durezza e densità della prostata sul lato opposto del canale, suscettibile d'un certo grado di distensione, non fende il corpo della ghiandola con tutta la larghezza della lama, ma, da quanto ho potuto rilevare, con una linea circa di meno. Lo fende però completamente. Pervenuto in fine lo stromento alla estremità chiusa della scannellatura del catetere solcato, o sia entro della vescica per un pollice e mezzo di là del suo orificio, poichè l'orificio stesso si presta quasi spontaneamente al diametro di cinque linee, mentre la guida dello stromento non ne ha che quattro, ed il tagliente è rispinto dalla durezza della prostata per una linea circa, ne viene, che la base della prostata non rimane tagliata che alla profondità di cinque linee circa, ancorchè la lama tagliente del conduttore ne abbia sette di larghezza. Per la qual cosa di tutta la spessezza della base della prostata, secondo la diversità dei soggetti, ne sono risparmiate sempre ora due, ora tre linee, il qual risparmio, come si è detto da principio, è di grande vantaggio per il buon esito dell'operazione, si perchè ciò che rimane intatto di tutta la grossezza della base della prostata impedisce che si formino infiltrazioni orinose, ascessi gangrenosi, o fistole fra la vescica ed il retto intestino, come perchè ciò che resta di non reciso di tutta la grossezza della base della prostata d'intorno l'orificio della vescica non oppone che una debole resistenza alla

dilatazione, che necessariamente, ed in ogni caso dopo il taglio deve instituirsi per ottenere l'estrazione della pietra. La stessa proporzione rimane tagliando un uomo giovine di mezzana grandezza dai diciotto ai venticinque anni con un conduttore tagliente, la di cui lama non abbia che cinque linee circa di larghezza, siccome è quello che vedesi delineato nella tavola annessa a questa memoria.

Il taglio laterale col coltello di Cheselden instituito diligentemente da mano esercitata, e sopra il cadavere d' un uomo di quarantacinque anni, e di grossa corporatura, dà per risultato la completa spaccatura dell'apice della prostata, e l'incisione della base di questa ghiandola alla profondità soltanto di quattro, o al più cinque linee; il qual risultato è precisamente lo stesso di quello che si ottiene praticando il taglio laterale collo stromento di Hawkins nuovamente corretto, la di cui lama tagliente ha sette linee di larghezza nella maggiore sua convessità. E questo stromento regge altresì al confronto del litotomo a guaina del frate Cosimo. Imperocchè adoprando sul cadavere d' uomo adulto il litotomo aperto al n°. 12, o 13. l' apice della prostata rimane tagliato compiutamente, ed il corpo e la base della prostata colla quale circonda l'orificio della vescica, si trovano incisi soltanto alla profondità di quattro o cinque linee: lo che coincide precisamente coi risultati delle numerose sperienze da me fatte sui cadaveri col nuovo conduttore tagliente. Giova però osservare che per avere codesti risultati adoprando il coltello di Cheselden, la di cui lama non ha che quattro linee di larghezza, egli è necessario di spingere

il coltello assai avanti in vescica, e di avere l'avvertenza nel ritirarlo, di premerlo sul dorso sollevandolo nel manico, perchè si approfondi sufficientemente nella sostanza della base e del corpo della prostata, dalla durezza della quale il coltello è facilmente rispinto nel lato opposto, e non fa che una leggiera incisione di queste parti. Del pari adoprando il litotomo di frate Cosimo, egli è indispensabile, nell'atto di ritirare la lama tagliente aperta in vescica, di sollevare la mano, perchè venga incisa alla giusta profondità la base della prostata coll' orificio della vescica; indi di abbassare di nuovo la mano perchè rimanga spaccato completamente l'apice della prostata. Nel fare i quali movimenti d'alzamento ed abbassamento ognun vede che una mano non molto esercitata può deviare facilmente dai giusti confini per difetto o per eccesso, e quindi ora non incidere abbastanza profondamente la prostata nella sua base, e nel suo corpo; ora trapassare la base di questa ghiandola per tutta la sua spessezza, senza contare che mancando l'operatore d'una norma certa per l'inclinazione da darsi alla lama tagliente pria di ritirarla dalla vescica, può questa facilmente deviare dalla giusta e precisa direzione del taglio laterale, e quindi offendere ora l'arteria pudenda profonda, ora il retto intestino *(n)*. Al contrario adoprando il condut-

(n) Deschamps; *Traité hist. et dogmat. de la taille* T. III. § 95. Il est peut être de tous les instruments celui qui conviendra le moins aux jeunes praticiens. E al § 916. Je dirai plus; de tous les instruments connus pour pratiquer l'incision au col de la vessie, celui du Frère Côme sera peut-être le plus dangereux quand il ne sera pas conduit avec prudence, parce qu'il peut, s'il est plongé trop avant dans la vessie, intéresser la partie po-

tore tagliente recentemente corretto dietro una norma certa ed invariabile determinata dalla posizione perpendicolare del catetere solcato al corpo del malato, e dalla inclinazione della lama tagliente all' asse del collo dell' uretra, la direzione e la profondità del taglio laterale sarà sempre esatta e dentro i giusti confini, nè vi sarà luogo a temere che il tagliente oltrepassi la spessezza della base della prostata a tanto da offendere l'arteria pudenda profonda; e meno ancora che cada in basso sul retto intestino.

Il ramo *profondo* della pudenda arteria *(o)* dal punto ove si spicca dalla pudenda comune rasente la tuberosità dell' ischio va a piantarsi col maggior numero de' suoi rami nel bulbo dell' uretra, ed è esposto ad essere offeso anco nell' atto d'aprire l'uretra membranosa, se la punta del coltello non è portata di là e sotto del bulbo. E' sottoposto del pari ad essere reciso nel ritirare che si fa del coltello di Cheselden, o del litotomo del frate Cosimo, se la lama dell' uno o dell' altro è inclinata di troppo verso il ramo, o la tuberosità dell' ischio. Ma nulla di tutto ciò può accadere adoprando il nuovo conduttore tagliente; poichè la lama di esso diretta obliquamente all' insù, non oltrepassa giammai il corpo e la base della ghiandola a tanto di offendere l' arteria sopra menzionata.

I partigiani del litotomo di frate Cosimo, fra i vantaggi che si possono trarre dalla pratica di questo stro-

---

stérieure de ce viscère; il peut aussi manquer l'incision projetée, s'il n'est pas poussé assez avant dans cet organe. La maniere de le placer en le retirant, influe encore sur la régularité de l'incision.

(o) Sull' aneurisma Tav. IV. 7

mento, fanno gran conto della facilità e sicurezza, colla quale mediante il litotomo anzidetto aperto al n°. 5 si può approfondare l' incisione del collo dell' uretra ogni qual volta col primo taglio non fosse riuscita abbastanza proporzionata al volume della pietra da estrarsi. Quantunque io sia di parere che ciò non possa mai abbisognare adoprando il nuovo conduttore tagliente d' Hawkins, la cui lama sia proporzionata alla grossezza della prostata d' un uomo adulto, e che inoltre sia cosa assai malagevole tanto col litotomo del frate Cosimo, che con altro qualunque stromento tagliente, dopo che è stato ritirato dalla ferita, il fare in modo che la seconda incisione cada precisamente nel fondo della prima, pure, se vuolsi riguardare ciò come un vantaggio del litotomo del frate Cosimo, sarà questo in comune col conduttore tagliente nuovamente corretto. Imperciocchè, fatta l' incisione interna, ed introdotto l' indice della mano sinistra in vescica lungo la guida dello stroménto, se l' operatore troverà necessario di approfondare maggiormente il taglio laterale nella sostanza della base della prostata, egli non avrà a far altro che appoggiare l' indice stesso sul margine ottuso della guida, mentre colla mano destra spingerà avanti e indietro il conduttore tagliente a modo di sega, col quale approfonderà ed allungherà l' incisione del collo dell' uretra, e della prostata a suo piacimento, e certamente con minor pericolo di fare una nuova incisione, che servendosi del coltello di Cheselden, o del litotomo del frate Cosimo, dopo che è stato ritirato dalla vescica.

In generale sul punto di stromenti di chirurgia,

ed in particolare di quelli che sono stati proposti per l'esecuzione del taglio laterale, Deschamps opina, che gli stromenti veramente perfetti ed utili sono quelli ai quali non è stato mai progettato di far correzione alcuna. Questa opinione generalmente vera non mette punto in discredito il conduttore d'Hawkins; poichè le correzioni state proposte a questo stromento da Bell, Dessault, Kline, Cruikshankes furono, piuttosto che correzioni, altrettante deviazioni dai principj sui quali il detto stromento era stato costruito dal suo autore. La forma sotto della quale io lo riproduco è meno una correzione, che una modificazione della forma sua primitiva, perchè adempia più esattamente di quanto faceva prima, all' indicazione di tagliare lateralmente ed alla giusta profondità la prostata, come faceva Cheselden, senza correr rischio d' offendere l' arteria pudenda profonda o il retto intestino. Le replicate sperienze da me instituite sui cadaveri, e quelle sui vivi felicemente riuscite in questa scuola in presenza di numerosa scolaresca, mi autorizzano a dichiarare che questo stromento merita di occupare un posto distinto nel moderno armamentario chirurgico, e quindi a commendarne la pratica, principalmente ai giovani chirurgi.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

FIG. I

Lo stromento d' Hawkins nuovamente corretto, e veduto nella sua faccia posteriore

a. a. La guida
b. Il manico
c. Il beccuccio
d. e. La lama tagliente

FIG. II

Lo stesso stromento veduto per la faccia sua anteriore

FIG. III

Il medesimo stromento veduto di profilo

FIG. IV

Sezione verticale dello stromento, ed inclinazione della lama tagliente all' asse longitudinale della guida

Fig. II.

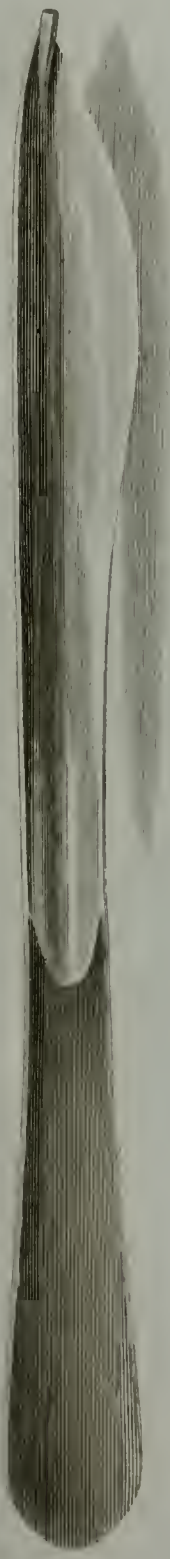


Fig. I.

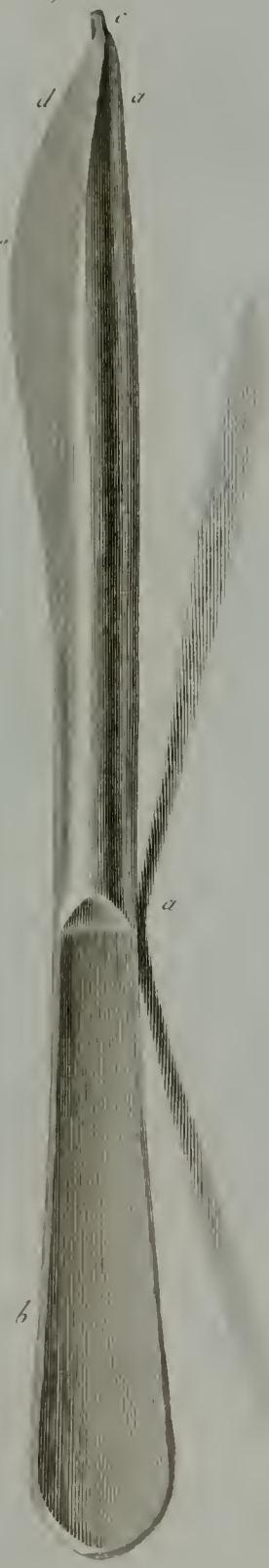


Fig III.

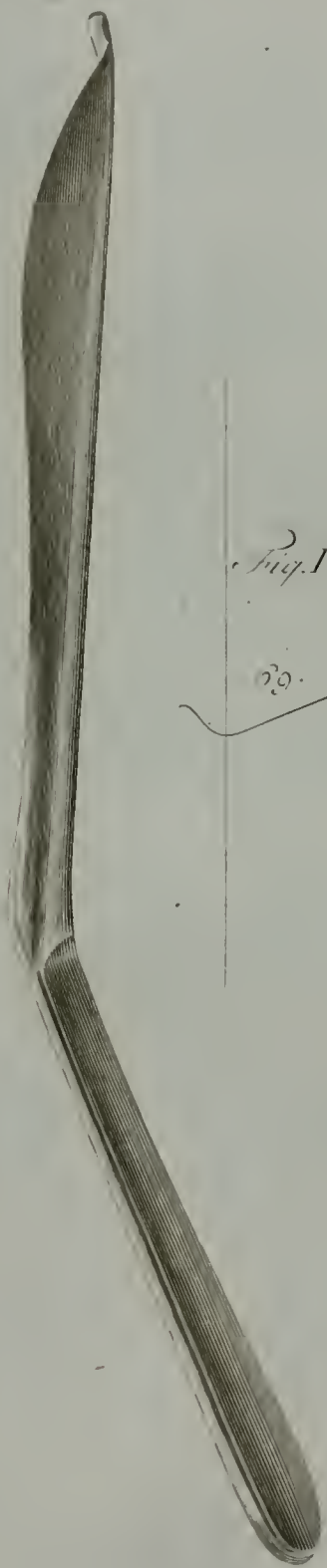
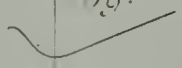


Fig. IV.



SULLE LIVELLAZIONI BAROMETRICHE

Di Francesco Venini

PARTE II

ricevuta il dì 11 di luglio 1807

Nuovi schiarimenti intorno ai metodi diretti

Esponendo nella prima parte il metodo diretto che conduce alle formole delle livellazioni barometriche, io mi son ristretto alle cose più essenziali, affinchè l'attenzion del lettore men divagata e più raccolta le potesse intendere più facilmente. In questa seconda parte aggiungerò dunque varie cose, che nella prima ho soppresse, ed alcune altre, alle quali sol dopo averla scritta ho pensato. A questa succederà una terza parte, in cui esaminerò i metodi che comunemente si chiamano indiretti; darò le formole che ne derivano; e finalmente aggiungerò i calcoli di varie misure barometriche delle altezze, e fra queste di alcune fatte nel nostro paese.

SEZIONE I

Modo facile di calcolar le formole per le livellazioni barometriche coi metodi diretti dell' Hallejo e del Taylor

29 Nel calcolar le mie formole con metodi diretti io dichiaro apertamente d'aver seguìto l'esempio di molti insigni Matematici, che assai prima di me l'avean fatto. Il primo a segnar questa via è stato il dottissimo Hallejo, il quale fin dall' anno 1685 presentò alla società di Londra una memoria impressa nel numero 181 delle transazioni filosofiche, nella quale dai soli principj fisici risguardanti le dilatazioni dell' aria, ed il rapporto fra i pesi specifici dell' aria e del mercurio egli deduce la sua regola per misurar col barometro le altezze dei luoghi sopra il livello del mare. Io credo far cosa grata al lettore spiegando particolarmente il metodo del primo inventore, e mostrando come la sua regola conduca ad una formola quasi eguale alla mia.

Ei dice adunque che con esperienze ben fatte si è trovato, esser la gravità dell'acqua a quella dell'aria una volta come 820, un'altra come 840, ed una terza come 860 ad 1; al che aggiunge, che queste sperienze furon fatte in estate essendo il barometro all'altezza di 29, 75 pollici inglesi. E quindi egli conchiude potersi senza error sensibile ammettere che, quando il barometro è a 30 pollici ed il calore in uno sta-

to medio, il peso specifico dell'aria è a quello dell'acqua come 1 ad 800.

Con altre sperienze, egli dice ancora, s'è trovato, che il peso del mercurio è a quello dell'acqua presso a poco come 13,5 ad uno: di che segue, esser i pesi del mercurio e dell'aria nel rapporto di 10800 ad 1, e che il peso d'un pollice di mercurio equivale a quello di 10800 pollici o di 900 piedi d'aria.

Applicando poi la geometria alla legge stabilita dai Fisici, per la quale le dilatazioni ed i volumi dell'aria sono in ragione inversa dei pesi comprimenti, egli osserva, che le coordinate dell'iperbole fra le assintote esprimon questa legge; vale a dire che se colle ascisse prese dal centro si rappresentano le altezze dei barometri corrispondenti alle pressioni dell'atmosfera, le ordinate esprimeranno le dilatazioni dell'aria. Da questi principj ei conchiude, per la celebre proprietà degli spazj assintotici scoperta nel suo secolo e dimostrata dal padre Gregorio da san Vincenzio; che, chiamate A ed x le altezze del barometro a due stazioni, la cui distanza perpendicolare sia z, ed A', x' le altezze per altre due stazioni poste alla distanza pur verticale z' dev' essere $L\frac{A}{x} : L\frac{A'}{x'} = z : z'$. Da quest'analogia combinata coll'esperienze, che danno il peso del mercurio a quello dell'aria come 10800 ad 1 allorchè il barometro è a 30 pollici inglesi sua solita altezza al livello del mare, e la temperatura dell'aria e del mercurio in uno stato medio, l'Hallejo deduce poi la sua regola per trovar nelle medesime circostanze le altezze dei luoghi sopra il livello del mare; il che agevolmen-

te può farsi in questa maniera. Poichè la densità del mercurio è a quella dell'aria come 10800 ad 1 essendo il barometro a 30 pollici, egli è chiaro, che portandolo in un sotterraneo ove salisse a pollici 30, 05, e ad una stazion superiore, ove scendesse a pollici 29, 95, la porzione d'aria intermedia d'una densità sensibilmente uniforme e dieci mila ottocento volte minore della densità del mercurio farebbe equilibrio ad un decimo di pollice del metallo anzidetto. Dunque la distanza delle due stazioni ossia la lunghezza della colonna d'aria intermedia sarebbe un decimo di 10800 pollici cioè 1080. Nell'analogia posta quì sopra sarà dunque $A=30, 05$; $x=29, 95$; e $z=1080$; onde si cangerà nella seguente

$$L\frac{30, 05}{29, 95} : L\frac{A'}{x'} = 1080 : z' ;$$ vale a dire, che sarà

$$z' = \frac{1080\, L\frac{A'}{x'}}{L\frac{30, 05}{29, 95}} = \frac{1080\, L\frac{A'}{x'}}{0, 0014477} = 746010\, L\frac{A'}{x'} ;$$

la qual formola ha i pollici per unità. Sostituiti i piedi ai pollici, essa fia dunque $z'=62167, 5\ L\frac{A'}{x'}$.

Supposto $A'=30$ pollici, e messi successivamente in luogo d'x' i numeri 30, 29, 28 ec. si saprà quanto sian più alte del mare le stazioni, nelle quali le altezze dei barometri son di pollici 30, 29, 28 ec. Così $z'=62167, 5\ L\frac{30}{30}$ è $=0$; $z'=62167, 5\, L\frac{30}{29} = 915, 3$; $z'=62167, 5$

$L\frac{30}{28} = 186, 274$. E tali appunto sono le altezze nella tavola calcolata dall' Hallejo, prescindendo dalle frazioni ch' egli ha negligentate.

Trenta pollici inglesi corrispondono a 28, 149189 delle antiche misure francesi. Dunque, trasportato il barometro a due stazioni, nelle quali abbia le altezze 28, 199189, e 28, 099189, ne risulterà

$L\frac{A}{x} = L\frac{28,199189}{28,099189} = 0.0015428$. La colonna d' aria posta fra le due stazioni, cioè la loro distanza z è, come sopra si è detto, $= 1080$: e ciò posto, abbiam la proporzione $0.0015428 : L\frac{A'}{x'} = 1080 : z'$; e per conseguente $z' = \frac{1080\, L\frac{A'}{x'}}{0.0015428} = 700026\, L\frac{A'}{x'}$ in pollici $= 58335,5\, L\frac{A'}{x'}$ in piedi. Finalmente, diviso per 6 il coefficiente, la formola dell' Hallejo sarà $z' = 9727, 7\, L\frac{A'}{x'}$, e darà le altezze in tese di Francia.

In questa formola si suppone l'aria ad una temperatura media qual è quella di 54°, 5 Far. o 10° Réaumur. Quindi, se vorrem ridurla alla temperatura del ghiaccio, dovrem osservare, che la colonna d'aria corrispondente a due determinate altezze di due barometri posti verticalmente un sopra l'altro, ha una lunghezza proporzionale al calore da cui è rarefatta o conden-

sata; e ne conchiuderemo che supposto = 1 il volume dell'aria alla temperatura zero di Réaumur, ed $1+m$ al grado 10, la distanza z' delle due stazioni calcolata pel grado 10 s'avrà a dividere per $1+m$ volendo ridurla al grado zero. Per questa temperatura avremi dunque $z' = \frac{9727,7}{1+m} L \frac{A'}{x'}$. Fra poco vedremo, che la dilatazion media dell'aria risultante dalle osservazioni di dodici diversi autori è 0,004878 per ogni grado di Réaumur, e quindi 0,04878 per 10 gradi. Questo è dunque il valor di m; il quale sostituito nella formola la riduce a $z' = \frac{9727,7}{1,04878} L \frac{A'}{x'} = 9275,25 L \frac{A'}{x'}$ formola non guari diversa dalla mia $z' = 9240,7 L \frac{A'}{x'}$; e che darebbe le altezze maggiori di 374 centomillesimi. Anzi prendendo le dilatazioni dell'aria dalle tavole del General Roy (come ho sempre fatto nella prima parte), il coefficiente si ridurrebbe a 9249, 5; e darebbe le altezze maggiori di soli 95 centomillesimi.

Il Taylor non ha data, a dir vero, alcuna regola per le livellazioni barometriche; ma nel suo celebre metodo degl'incrementi diretto ed inverso stampato a Londra nel 1715 ha esposta e dimostrata una formola, colla qual si determina la densità dell'aria a qualunque distanza dal centro della terra nell'ipotesi della gravità in ragion inversa duplicata delle distanze; ed io mostrerò quanto sia facile l'applicarla alla misura barometrica delle altezze.

Il Taylor chiama a il raggio della terra, alla cui superficie suppone la gravità $= 1$; x la distanza verticale d'uno strato dell'aria dal centro; y la densità dell'aria in quello strato proporzionale al peso dell'aria superiore e per conseguenza all'altezza, che in quello strato avrebbe il barometro; e trova che il rapporto fra x ed y è espresso dall'equazione $\frac{dy}{y} = \frac{-a^2\,dx}{c\,x^2}$; nella quale ci dimostra, esser c ugnale alla lunghezza d'una colonna d'aria, che al livello del mare sostenga nel barometro il mercurio a 30 pollici inglesi, ed abbia in tutta la sua lunghezza la stessa densità che alla base. Questa densità poi è da lui determinata nel modo seguente. „ Per „ un esperimento (dice egli alla pag. 104 dell' opera „ menzionata) fatto dall'Hauksbee si sa, che la mezza- „ na densità dell' aria è a quella dell'acqua come 1 ad „ 820. E' anche la densità dell'acqua a quella del mer- „ curio come 1 a 13, 5. Dunque la densità dell' aria „ è a quella del mercurio come 1 a 11070 „

Da questo valore della densità dell' aria si deduce immediatamente, che la lunghezza cercata della colonna aerea, ossia il valor di c è $= 30 . 11070$ pollici $= 27675$ piedi inglesi.

Agevol cosa è il dedurre da questi Dati una formola per le misure barometriche delle altezze adattata all' ipotesi della gravità costante; della qual solamente ho trattato finora. A questo fine io comincio a supporre $x - a = z$ facendo cominciare le altezze da misurarsi o dal livello del mare o a poca distanza verticale dal medesimo. Sostituisco poi $z + a$ ad x nella formola del

Taylor; e n'ho $\frac{dy}{y} = \frac{-a^2\,dz}{c\,(z+a)^2}$. Ora in tutte le livellazioni barometriche è z una quantità piccolissima in paragone di a, e piccolissima per conseguenza anche la diminuzione della gravità, che potrà aversi per costante in tutta l'altezza z. Dunque $z+a$ sarà lo stesso che a; il che riduce la formola a $\frac{dy}{y} = -\frac{dz}{c}$; ovvero a $dz = -\frac{c\,dy}{y}$. Sostituito il valor di c in piedi inglesi posto qui sopra, ne risulta $dz = 27675\,\frac{dy}{y}$; e quest' equazione integrata colla condizione, che quando z è $= 0$, sia y eguale all'altezza del barometro alla stazion inferiore, che esprimeremo per A, si riduce a $z = 27675\,l\,\frac{A}{y}$, avvertendo che y tanto esprime l'altezza del barometro alla stazion superiore, quanto la densità, che quivi ha l'aria. Si sostituiscano i logaritmi delle tavole a quei di Nepero; e sarà $z = 27675\,l\,10L\,\frac{A}{y}$. Osservo che 17675 piedi inglesi equivalgono a 25908, 514 francesi, o tese 4318,085: sostituisco questo valore, e n'ho, negligentando gli 85 millesimi,

$$z = 4318\,l\,10L\,\frac{A}{y} = 9942,8\,L\,\frac{A}{y}.$$

Il rapporto dei pesi specifici dell'aria e del mercurio adottato dal Taylor, paragonato con quel dell'Hállejo indica una temperatura maggiore di tre o quattro

gradi. Supponendo ch' ella fosse di 13 gradi, avremo per le tavole del Roy $C = 1,0680$, e per conseguenza

$$z = \frac{9942,8}{1,0680} L\frac{A}{y} = 9309,7\, L\frac{A}{y}.$$

Il coefficiente di questa formola ha una singolarità degna d' esser osservata; voglio dire, ch' esso è quasi esattamente il medio fra i coefficienti dati da DeLuc, da Shuckburg, da Roy, e da me.

Sezione II

Del coefficiente calcolato coll' esperienza del cavalier Shuckburg

30. Al num. 4 nel calcolar il coefficiente coll' esperimento del cavalier Shuckburg mi sono scorsi nei numeri alcuni errori, che lo han reso alquanto maggiore di quel ch'ei dev'essere. Per gradi $9\frac{1}{3}$ le dilatazioni del mercurio e dell'aria sono pel primo, 0,002315, per la seconda, 0,0482; non 0,002262, e 0,0471. Ora con questi dati si ha

$$D = \frac{(11364,6)\,(1,002315)}{1,0482};$$

$$A' = \frac{27,464}{1,002315};$$

$$D\,A' = \frac{(11364,6)\,(27,464)}{1,0482};$$

ed il coefficiente vien quindi ad essere $\frac{(11364,6)(27,464)\,l\,10}{1,0482}$. Facciasi il calcolo con questi

numeri, e si troverà il logaritmo del coefficiente in tese $=3.9787571$, cui corrisponde il numero 9522,64 un po' minore di quello del num. 4; ma che nel calcolo delle altezze le darebbe minori poco più che d'un millesimo. Volendo però calcolar il coefficiente coi soli sperimenti di Shuckburg, si dovrà far uso della dilatazion dell'aria trovata da lui, cioè di 0,0054675 per ogni grado di Réaumur (vedi il num. 18), la quale ridurrebbe il coefficiente a 9499,95.

Il professore Hennert ha calcolato anch'egli il coefficiente con quest'esperimento medesimo; ma non si è guardato da un piccolo sbaglio, in cui è facilissimo di cadere. Lo sbaglio consiste nel ridurre l'altezza del barometro dalla temperatura, ch'esso ebbe nel tempo della sperienza, alla temperatura zero; lo che non dee farsi senza cangiare altresì colla debita proporzione il rapporto delle densità dell'aria e del mercurio dall'esperienza medesima somministrato. Ma facendo anche quest'altro cangiamento, si distrugge; e per conseguenza si rende inutile quel che si è fatto colla riduzione dell'altezza barometrica. La cosa a me sembra assai chiara; ma, poichè l'autorità di quel celebre matematico potrebbe nel leggitore eccitar qualche dubbio sulla verità della mia proposizione, non sarà forse superfluo il darne quì un'esatta dimostrazione.

Nel coefficiente calcolato per la temperatura del ghiaccio, che si scioglie così del mercurio come dell'aria, si suppone che con qualche sperimento fatto alla temperatura suddetta siasi trovato, che la densità del mercurio è a quella dell'aria compressa da un peso indicato dall'altezza A' del barometro nel rapporto di 1 ad

$\frac{1}{D}$; ove la densità del mercurio è espressa dall'unità. Sia ora a' l'altezza del barometro; t la temperatura dell'aria e del mercurio nel tempo d'un' altra esperienza, con cui s'abbia a determinar il valore di $D\,A'\,l$ 10 coefficiente per la temperatura zero R. Sia in oltre $1 : \frac{1}{n}$ il rapporto delle densità del mercurio e dell'aria trovato con quest'esperienza. Chiamiamo $\frac{1}{\delta}$ la densità del mercurio; $\frac{1}{d}$ quella dell'aria; ed avremo $\frac{1}{\delta} : \frac{1}{d} = 1 : \frac{1}{n}$.

Sia E l'espansion del mercurio da zero al grado t; e l'altezza a' del barometro ridotta alla temperatura zero sarà $\frac{a'}{1+E}$. Dunque, poichè le densità di due colonne di mercurio d'ugual peso sono in ragione inversa delle lunghezze loro, sarà $\frac{1}{\delta} : 1 = \frac{a'}{1+E} : a'$; e per conseguente $\frac{1}{\delta} = \frac{1}{1+E}$. Dunque la prima analogía si cangerà in $\frac{1}{1+E} : \frac{1}{d} = 1 : \frac{1}{n}$; onde nasce $\frac{1}{d} = \frac{1}{n(1+E)}$.

Sia per simil guisa E' l'espansion dell'aria da zero a t; e sarà $1 : 1 + E'$ come $\frac{1}{n(1+E)}$ densità dell'aria pel grado t ad $\frac{1+E'}{n(1+E)}$ sua densità per la tempe-

ratura zero. Ciò posto nel coefficiente $A' D l$ 10 sostituiremo $\frac{a'}{1+E}$ ad A', ed $\frac{n(1+E)}{1+E'}$ a D; colle quali sostituzioni lo ridurremo ad $\frac{n a' (1+E) l\, 10}{(1+E)(1+E')} = \frac{n a' l\, 10}{1+E'}$.

In questa formola resta tuttavia l' altezza barometrica a' qual è data dall' osservazione fatta alla temperatura t; e da tutto l' andamento del calcolo è manifesto, non dover farsi alla detta altezza riduzion veruna; poichè, facendola, è d' uopo far lo stesso nella densità del mercurio $\frac{1}{\delta}$; la qual cresce di tanto di quanto l' altezza barometrica è proporzionalmente diminuita.

Qui sopra abbiam trovato, che il coefficiente calcolato senza cangiare l' altezza del barometro, e coll' espansion dell' aria notata nelle nostre tavole è 9522,64. Ma se, come vuole il sig. Hennert, si riducesse l' altezza del barometro a quella della temperatura zero, l' altezza ridotta coll' uso delle medesime tavole sarebbe 27, 402; e fatto il calcolo con questa, il coefficiente si ridurrebbe a 9501, 15; e questo diminuirebbe le altezze date dal coefficiente esatto di 226 centomillesime, piccola diminuzione, a dir vero, ma erronea anche nella sua piccolezza.

Sezione III

Della riduzion dei barometri alla stessa temperatura

31. Gli esperimenti co' quali il General Roy ha de-

terminate le dilatazioni del mercurio, furon fatti con un barometro, ch'era all'altezza di 30 pollici inglesi corrispondenti a 28, 149 francesi. Ora a quest'altezza del barometro la distanza della superficie interna del mercurio dall'estremità chiusa del tubo è una delle più piccole, e per conseguente la resistenza alle dilatazioni del mercurio prodotta dall' imperfezione del vuoto è una delle più grandi. E' non par dunque, che la tavola del Roy possa applicarsi a ridurre le altezze barometriche alla stessa temperatura, quando la lunghezza della colonna mercuriale sia sensibilmente minore di 28 pollici. Ma, non ostante quest'incertezza, io credo che nella misura delle altezze si possa far uso della stessa tavola senza alcun sensibil errore; e ciò per la seguente ragione. Se le dilatazioni del mercurio fossero uniformi, e la parte superior del barometro perfettamente vuota, posta la dilatazione da zero ad un grado di 251 milionesimi, tale sarebbe nè più nè meno anche da ogni altro grado n al prossimo $n+1$. Ciò premesso, io ne formo la tavola seguente, nella quale la prima colonna contiene i gradi del termometro da -5 a $+25$, intervallo che comprende quasi tutte le temperature, in cui posson farsi le livellazioni barometriche: la seconda colonna contiene le dilatazioni uniformi: la terza le variabili tratte dalla tavola del General Roy: la quarta in fine le differenze, o sia le diminuzioni d'espansione, che suppongo interamente prodotte dall' imperfezione del vuoto nella parte superior del barometro.

Gradi	*Dilatazioni uniformi*	*Dilatazioni variabili*	*Differenze*
— 5	0 , 998745	0 , 998741	4
— 4	0 , 998996	0 , 998993	3
— 3	0 , 999247	0 , 999244	3
— 2	0 , 999498	0 , 999496	2
— 1	0 , 999749	0 , 999748	1
0	1 , 000000	1 , 000000	0
1	1 , 000251	1 , 000251	0
2	1 , 000502	1 , 000502	0
3	1 , 000753	1 , 000752	1
4	1 , 001004	1 , 001001	3
5	1 , 001255	1 , 001249	6
6	1 , 001506	1 , 001496	10
7	1 , 001757	1 , 001743	14
8	1 , 002008	1 , 001989	19
9	1 , 002259	1 , 002234	25
10	1 , 002510	1 , 002478	32
11	1 , 002761	1 , 002722	39
12	1 , 003012	1 , 002965	47
13	1 , 003263	1 , 003207	56
14	1 , 003514	1 , 003449	65
15	1 , 003765	1 , 003690	75
16	1 , 004016	1 , 003930	86
17	1 , 004267	1 , 004169	98
18	1 , 004518	1 , 004407	111
19	1 , 004769	1 , 004645	124
20	1 , 005020	1 , 004882	138
21	1 , 005271	1 , 005118	153
22	1 , 005522	1 , 005353	169
23	1 , 005773	1 , 005588	185
24	1 , 006024	1 , 005822	202
25	1 , 006275	1 , 006056	219

Nell' esperimento del Roy la parte vuota del tubo fu di circa tre pollici; e per conseguenza la diminuzion successiva nelle dilatazioni della terza colonna è l' effetto della resistenza d' uno o di più fluidi espansibili chiusi in uno spazio di tre pollici, non contando la piccola diminuzione di questo spazio corrispondente alle successive espansioni del mercurio, diminuzione che anche pel grado + 25 non giugne a 17 centesimi di pollice. Ora la resistenza di questi fluidi deve in qualche ragione esser tanto minore, quanto maggiore è lo spazio, che li contiene; ma io non avendo alcun mezzo per determinare qual debba esser precisamente la detta ragione, la supporrò eguale alla semplice inversa degli spazj. Per questa ragione se D è la diminuzione dell' espansion del mercurio per un grado T' corrispondente ad un vuoto di tre pollici, per aver quella del vuoto $31-A$, lasciato nel barometro da una colonna di mercurio $=A$, fo la proporzione $31-A : 3 = D : \frac{3D}{31-A}$.

E per la ragion medesima la diminuzion corrispondente alla temperatura t' ed all' altezza del barometro a sarà $\frac{3d}{31-a}$. Si chiamino, come sempre abbiam fatto, M, m le dilatazioni indicate dalla terza colonna pei gradi T', t'; e sarà $M = 251\,T' - D$, $m = 251\,t' - d$, e per conseguenza $M - m = 251\,(T' - t') - D + d$. Chiamiam similmente M', m' le dilatazioni corrispondenti ai vuoti $31-A$, $31-a$ per le medesime temperature; e sarà $M' = 251\,T' - \frac{3d}{31-A}$, $m' = 251\,t' - \frac{3d}{31-a}$; e quin-

di $M'-m'=251\,(T'-t')-\frac{3\,D}{31-A}+\frac{3\,d}{31-a}$. Ora in tutte le livellazioni barometriche le differenze delle correzioni fatte con $M-m$ e con $M'-m'$ saran sempre così piccole, che la differenza corrispondente nelle due altezze calcolate non giungerà forse mai a tre decimi di tesa nelle grandi altezze, e nelle piccole sarà assai minore.

Sia per esempio $A=27,5$; $a=16,5$; $T'=23°$; $t'=4°$; $T'=24°$; $t=1°$. Ciò posto, sarà $M=5588$; $m=1001$; $M-m=4587$, e per conseguenza $A'=27,3738575$. Ora per aver anche i valori di M', m', osservo che nella tavola a $T''=23°$ corrisponde $D=185$, ed a $t'=4°$ $d=3$. Osservo in oltre, che $31-A$ è $=3,5$; e $31-a=14,5$; onde conchiudo esser $M'=5773-\frac{3\,.\,185}{3,5}=5614,45$; ed $m'=1004-\frac{3\,.\,3}{14,5}=1003,38$. E' dunque $M'-m'=4611$, e quindi $A'=27,3731975$. La differenza tra i due valori di A' è dunque di pollici $0,00066$; vale a dir che non giunge ad otto millesimi di linea; alla quale nel calcolo delle altezze corrisponderà la differenza d' uno o due decimi di tesa. E in vero, fatto il calcolo pe' due valori di A' colla formola del calor decrescente in progressione aritmetica $x=20000\,C\left(\frac{(A')^{0,20066}-a^{0,20066}}{(A')^{0,20066}}\right)$, si trovan questi due valori dell' altezza $x=2177,3$; $x=2177,2$; la cui differenza è d' un solo decimo di tesa su 2177.

Io ho scelto quest' esempio per mostrare quanto sia piccola la differenza dei risultati anche nei casi, in

cui D e $31 - a$ son molto grandi, e deggion produrre per conseguente una delle massime differenze. Questa, a dir vero, sarebbe alquanto maggiore, se la resistenza alla dilatazion del mercurio fosse non già nella ragion semplice inversa degli spazj vuoti, ma nell'inversa duplicata. Nondimeno anche allora ella si ridurrebbe a ben poco. Così nell'esempio precedente sarebbe $M' = 5773 - \frac{3^2 . 185}{(3,5)^2} = 5637,09$; ed $m' = 1004 - \frac{3^2 . 3}{(14,5)^2} = 1003,87$. In questo caso sarebbe dunque $M' - m' = 4633$; e per conseguenza $A' = 27,3725925$: la cui differenza da 27,3738575 si riduce a 0,001265 pollici, o circa 15 millesimi di linea; alla quale può corrisponder nelle altezze una differenza d'uno o due decimi di tesa.

31. Il celebre matematico Laplace ha date due formole di livellazioni barometriche, una per la gravità costante, l'altra per la gravità doppiamente variabile, cioè decrescente in ragion duplicata delle distanze dal centro della terra, e crescente con una certa legge al crescer delle latitudini. In amendue le formole la riduzion dei barometri alla stessa temperatura si fa accrescendo, come dice egli stesso, l'altezza del barometro nella stazion la più fredda della sua parte 5412^{ma} presa tante volte, quanti sono i gradi di differenza nelle temperature delle due stazioni (Esposizione del sistema del mondo: seconda edizione: pag. 82), avvertendo che i gradi di cui parla l'autore, son quelli del termometro detto di Réaumur, ma a scala centenaria. Ciò posto, ognun vede, che la sua formola di correzione e

$\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a\,(1 + \frac{T' - t'}{5412})}$ ne' casi più ordinarj, cioè in quelli ne' quali il barometro inferiore è più caldo del superiore. Ma ne' casi contrarj la correzione dovrà farsi al barometro inferiore; e la formola diverrà

$$\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a}\left(1 + \frac{t' - T'}{5412}\right).$$

L'autore dice lo stesso nella sua grand'opera intitolata Meccanica celeste; vol. IV; pag. 291; ove si esprime in questi termini. " Io ho trovato con un' esatta e- " sperienza, che il mercurio si dilata della sua parte " 5412^{ma} per ogni grado del termometro: convien dun- " que nella stazione corrispondente alla minor tempe- " ratura aumentar l'altezza osservata del barometro del- " la sua parte 5412^{ma} presa tante volte, quanti sono i " gradi nella differenza di temperatura del barometro " alle due stazioni. " Per queste parole egli è manifesto che giusta il sig. Laplace la correzione deve sempre applicarsi al barometro più freddo accrescendone l'altezza, per portarla a quella che corrisponde alla temperatura del più caldo.

Al num. 13 io ho dimostrato, seguendo in ciò l'esempio dell' Hennert, che la formola di correzione è

$$\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a}\left(1 - \left(\frac{M - m}{n}\right)\left(1 - \frac{M}{n}\right)\right);$$

la quale si riduce però quasi sempre ad

$$\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a}\left(1 - \frac{M - m}{n}\right)$$

Sia E l'espansion del mercurio supposta uniforme per ogni grado del termometro, come la suppone Laplace, e sia per conseguente $\frac{M}{n} = E\,T'$, ed $\frac{m}{n} = E\,t'$. La formola si cambierà dunque in

$$\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a}\Big(1 - E\,(T' - t')\;(1 - E\,T')\Big)$$

e toltone alcun raro caso in

$$\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a}\Big(1 - E\,(T' - t')\Big)\,.$$

Or quest'ultima, se t' è $> T'$, si riduce ad

$\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a}\Big(1 + E\,(t' - T')\Big)$ come vuol la regola del sig. Laplace. Resta a vedere se questa regola anche ne' casi assai più frequenti di $T' > t'$ si possa conciliar colla mia formola, che prescrive di diminuir l'altezza del barometro più caldo, non d'accrescer quella del più freddo. A questo fine si osservi che essendo

$\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a}\Big(1 - E\,(T' - t')\Big)$, sarà anche

$$\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a\left(\frac{1}{1 - E\,(T' - t')}\right)}$$

e risolvendo in serie la frazione del denominatore, ne risulterà

$$(\mathrm{F})\quad \frac{A'}{a'} = \frac{A}{a\,(1 + E\,(T' - t') + E^2\,(T' - t')^2 + E^3\,(T' - t')^3 + \text{ec.})}$$

Se E non fosse una frazion piccolissima, questa formola sarebbe sensibilmente diversa da

$\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a\,(1 + E\,(T' - t'))}$ cioè da quella del sig. Laplace;

ma per la tenuissima quantità, di cui il mercurio si dilata per ogni grado del termometro eziandìo di Réaumur, il valore delle due formole è quasi lo stesso, ed ecco in qual modo. L' espansion del mercurio, che Laplace dice d'aver trovata coll'esperienza, è $\frac{1}{5412}$ per ogni grado del termometro a scala centenaria. Essa è dunque = 0,0001047, e questa moltiplicata per $\frac{4}{5}$ dà l' espansione pel termometro coll' antica divisione = 0, 00023o875, ovvero 0,000231 negligentando i decimali minori d' un milionesimo. Quindi ognun vede che anche il sig. Laplace fa cominciar le dilatazioni, sebben non lo dica, dalla temperatura del ghiaccio; e che il risultato del suo sperimento è ben poco diverso dal medio di quelli di De-Luc, Shuckburg, e Roy; il quale è = 0,000236 pel num. 12. *(a)*. Ciò posto, abbiamo

(a) Il sig. Hallstrom professor di Fisica ad Abo in Isvezia, dopo d' aver dedotta dagli esperimenti di De-Luc una formola generale per l'espansione, che il calorico produce nel vetro, ha con sei diversi sperimenti determinata la legge, colla quale il mercurio si dilata esso pure per la stessa azion del calorico, passando dalla temperatura del ghiaccio a quella dell'acqua bollente. La dilatazion media pei due gradi estremi gli è risultata 0,017583, la quale, se si suppone uniforme, dà l'espansione per ogni grado di Réaumur = 0,000219S. Aggiunta anche questa dilatazione alle altre quattro, si troverà che la media delle cinque è 0,000231 66, o più semplicemente 0,000232. Vedi la dissertazione del signor Hallstrom intitolata *de expansione hydrargiri a calorico. Aboae. 1803.*

$E = 0,000231$, e quest'espansione moltiplicata per 25 gradi, oltre i quali non andrà forse mai la differenza delle temperature $T' - t'$, avremo $E(T'-t') = \frac{5775}{1000000}$. Sostituito questo valore, la formola F si ridurrà ad

$$\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a\left(1 + \frac{5775}{1000000} + \left(\frac{5775}{1000000}\right)^2 + \left(\frac{5775}{1000000}\right)^3 + \text{ec.}\right)}$$

La serie del denominatore è una progression geometrica, il cui primo termine è 1, il denominator della ragione $\frac{5775}{1000000}$ ed il numero dei termini maggiore d'ogni assegnabile. Or la somma d'una progression così fatta è, come tutti sanno,

$$= \frac{1}{1 - \frac{5775}{1000000}} = \frac{1000000}{994225} = 1,00580844.$$

La mia formola F divien dunque

$\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a(1,00580844)}$; laddove quella del sig. Laplace è

$\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a(1,005775)}$. Ciò posto, ognun vede che la differenza tra i due denominatori si riduce ad a (0,0000 3344), cioè a poco più di tre centomillesime moltiplicate nell'altezza a del barometro superiore, quantità così piccola, che nel calcolo delle altezze dei luoghi potrà senz'alcun pericolo d'errore negligentarsi.

In fatti la supposta differenza di 25 gradi nella tem-

peratura dei due barometri non può aver luogo, se la lor distanza verticale non è maggiore di due mila tese, e per conseguente se a non è minore di duecento linee. Ma quando anche fosse $a = 200$, lin. la differenza dei due denominatori sarebbe $200\,(0,0000\,3344) = (0,006688)$ lin. cioè meno di sette millesimi di linea, alla quale nel calcolo delle altezze non può corrispondere una sensibil differenza.

Nella sola osservazion del Monbianco s'è trovata finora tanta diversità di temperatura. Io non so veramente quali fossero i gradi dei due termometri attaccati; perchè il sig. deSaussure ha date le altezze dei barometri già corrette da lui colla regola del suo concittadino DeLuc. In quest' incertezza supporrò, che nel tempo dell'osservazione la temperatura dei barometri sia stata eguale a quella dell'aria, cioè $T' = 22°,6$; $t' = -2,3$. In questo caso fu dunque $T' - t' = 24°,9$ quasi uguale alla differenza massima 25° da me supposta. L'altezza corretta del barometro inferiore si ebbe sottraendo, giusta la regola di DeLuc, 15, 24 sedicesimi di linea dall' osservata, e quella del superiore aggiungendone all'osservata 8, 81. Le due altezze osservate furon dunque 5242, 12; e 3095, 21.

Ciò posto, si ebbe colla mia formola

$$\frac{A'}{a'} = \frac{5242,12}{3095,21\,(1,0058\,0844)} = \frac{5242,12}{3113,1883};$$ e coll'altra

$$\frac{A'}{a'} = \frac{5242,12}{3095,21\,(1,005775)} = \frac{5242,12}{3113,0848}.$$

La differenza dei due denominatori è di $\frac{103}{16000}$

di linea, o di linee 0, 0064, vale a dir che non giunge a sette millesimi, così appunto come sopra abbiam detto che dovrebbe avvenire. E se coi due valori di $\frac{A'}{a'}$ si calcolerà l' altezza del monte, la differenza dei due risultati sarà minor d'un piede su 13404.

Sezione IV

Delle dilatazioni dell' aria prodotte dal calorico.

32. Ho detto qui sopra, che la dilatazion media dell' aria dedotta dalle sperienze di dodici diversi Fisici è 0, 004878 per ogni grado del termometro di Réaumur coll' antica scala, ed ora ne darò la prova. Hauksbée, Crucchio, Mayer, Bradley, La Caille, Bonne, Shuckburg, Saussure, Gai Lussac, e Kirwan credon le dilatazioni sempre uniformi; ma non s'accordan fra loro nell' assegnarne la quantità. Imperciocchè, chiamato 1 il volume dell' aria alla temperatura del ghiaccio, la dilatazione per ogni grado è espressa dai numeri seguenti

secondo	Hauksbée	0 , 004651
	Crucchio	0 , 005139
	Mayer	0 , 004540
	Bradley	0 , 005364
	La Caille	0 , 003947
	Bonne	0 , 004708
	Shuckburg	0 , 005467
	Saussure	0 , 004240
	Gai Lussac	0 , 004687
	Kirwan	0 , 005620

Ma le dilatazioni trovate dal General Roy son variabili come apparisce dalla tavola posta in fine della prima parte di questa memoria. Volendo però prenderne una media, e considerarla come uniforme, basterà farlo in un intervallo di temperature diverse, oltre il quale non sian mai per estendersi quelle delle livellazioni barometriche; e come tale si può considerar l'intervallo da $-5°$ a $+25°$. Ora nelle tavole del Roy la condensazion per $-5°$ è 1, 000 − 0, 9755 = 0, 0245; e la dilatazione per $+25°$ si vede anch'essa nella tavola esser 0, 1323. La somma della condensazione e della dilatazione è dunque 0, 1568; e questa divisa per 30 gradi d'intervallo dà 0, 005226 per la dilatazion media supposta uniforme.

Per gli sperimenti del Dalton, il cui risultato si legge nella biblioteca britannica al tomo XXI scienze ed arti, la dilatazione dell'aria dal grado 55 Farhe: al 212, avuto riguardo alla dilatazion del vetro, è 0, 325. Dunque, supponendo ch' ella sia uniforme, e cominci dal volume del grado 55 preso per unità, ad ogni grado corrisponde la dilatazione $\frac{0,325}{157} = 0,00207$. La condensazione per 23 gradi, intervallo posto fra 55° e 32°, è dunque 23 (0, 00207) = 0, 04761; e questa sottratta dal volume 1 dà per residuo 0, 95239 volume corrispondente al grado 32. Collo stesso calcolo si troverà, che il volume pel grado 33 è 0, 95446. Trasportata finalmente l'origine delle dilatazioni al grado 32, si dirà come 95239 a 95446, così 1 ad 1, 002173 volume del grado 33. Dunque l'espansione per ogni grado di Farheneit, cominciando dalla temperatura del ghiaccio, è

0, 00217344, e la totale dal ghiaccio all'acqua bollente 0, 3912192, non 0, 373 come altri ha creduto ingannato dalla comune inavvertenza di trasportar le dilatazioni da una temperatura ad un'altra senza cangiarne l'unità.

Il Dalton ha trovato egli pure non esser le dilatazioni uniformi ed avere il General Roy con ragione affermato, che nelle alte temperature esse van lentamente diminuendo. Ma egli non ha dato, ch'io sappia, la serie delle successive dilatazioni, come ha fatto il Roy; onde per me resta incerta la dilatazione dal grado -5 al $+25$; la qual divisa per 30 darebbe la dilatazion media corrispondente a quella del Roy. Per supplire a questa mancanza, io supporrò che le dilatazioni per 80 e 30 gradi sian proporzionali nelle sperienze di questi due Fisici, vale a dire, che 0, 412492 dilatazione per 80 gradi del Roy sia a 0, 391219 dilatazione per 80 del Dalton come 0, 1568 dilatazione per 30° del primo a 0, 1487135 dilatazione per lo stesso intervallo del secondo. La dilatazion media da $-5°$ a $+25°$ sarà dunque per gli esperimenti del Dalton 0, 004957. Si aggiungan finalmente queste due dilatazioni all'altre dieci, e si troverà la media delle dodici esser 0, 004878.

La dilatazione $\frac{1}{215}$ per la temperatura 16°, 75, che il De Luc ha dedotta dalle sue livellazioni barometriche trasportata alla temperatura del ghiaccio è (pel num. 16) 0, 0050435, o più esattamente 0, 0050441; e per conseguente la differenza tra quest'espansione tratta da osservazioni fatte all'aria aperta, e la media delle do-

dici fatte nell'aria chiusa nei manometri è di sole 166 milionesime.

SEZIONE V

Della diminuzion del calore corrispondente all'accrescimento delle altezze nell'atmosfera

33. Per mezzo di 9 osservazioni abbiam trovato al num. 23, che il medio abbassamento d'un termometro alzato verticalmente nell'atmosfera è d'un grado di Réaumur per ogni centinajo di tese. Vediam ora se a questo risultato sian conformi quelli di varie altre osservazioni fatte ad altezze non minori di 500 tese.

La massima altezza misurata dal General Roy è quella di Peak of Snowdon sopra Carnarven Quay, la qual è di 3555 piedi inglesi corrispondenti a 3335, 6779 francesi, o tese 555, 9455. Le osservazioni furon fatte in due giorni diversi, cioè ai 7 e 14 agosto 1775. Nel giorno 7 le medie di tre osservazioni diedero $T = 59° \frac{3}{5}$, e $t = 48° \frac{12}{24}$ di Far. corrispondenti a 12°, 17; e 7°, 46 di Réaum. Nel giorno 14 le osservazioni furon quattro; e le medie diedero 58°, 5; e 44°, 06 F., ossia 11°, 71; e 5°, 36 R. Le medie delle due medie furon dunque 11°, 97; e 6°, 41; la cui differenza 5°, 56 corrisponde esattamente ad un grado per ogni centinajo di tese.

La maggior altezza misurata dal cavalier Shuckburg è quella del monte Mole non lungi da Ginevra di piedi inglesi 4211 corrispondenti a tese di Francia 658, 535. Le medie di 6 osservazioni fatte nella mattina d'un me-

desimo giorno diedero $T = 63°,03$; e $t = 50°,13$ F. corrispondenti a $13°,79$; e $10°,72$ R; la cui differenza è $3°,07$. Or questa per ogni cento tese dà gradi 0,4507; cioè meno d'un mezzo grado.

Nell'osservazione fatta da' signori Charles e Robert in un globo areostatico il primo dicembre 1783, la massima altezza cui giunsero, fu, secondo il calcolo inserito dal sig. abate Oriani nella sua memoria sulle rifrazioni, di tese 1649 a un di presso. Le altezze dei termometri furono $T = +7°$; $t = -5°$, e per conseguente $T - t = 12°$; alla qual differenza corrispondono gradi 0,7277 per ogni centinajo di tese.

L'altezza della cima dell'Etna sopra il mare, per un'osservazion barometrica del sig. de Saussure calcolata da lui col metodo del De Luc, risulta di tese 1672; e nell'osservazione fu $T = 18°,5$; $t = 3°,5$, e $T - t = 15°$. A questa differenza corrispondono gradi 0,8971 per cento tese. E si avverta, che il termometro superiore era sull'orlo del cratere vulcanico, ove la temperatura doveva esser maggiore della vera, e render minore la differenza.

Finalmente in un'osservazione del sig. Ramond, della quale avrò altrove occasion di parlare, fu $T = 15°,3$; $t = 3°,2$; $T - t = 12°,1$; e la vertical distanza delle due stazioni di tese 1341. Con questi dati si trovano gradi 0,9023 per ogni centinajo di tese.

Abbiam dunque undici osservazioni che danno un grado per cento tese, cioè le nove del num. 23, e le due del General Roy. Fatta la somma delle undici unità e delle quattro frazioni corrispondenti alle altre osservazioni; poi diviso il tutto per 15, numero delle os-

servazioni, abbiamo gradi 0, 9318 per ogni centinajo di tese; la cui differenza dall'unità non giugne a sette centesimi di grado.

La diminuzion d'un grado per ogni centinajo di tese è dunque presso a poco confermata da 15 osservazioni fatte a grandi altezze, cioè da tese 500 all'incirca fino a 2234, in alcune delle quali la stazion superiore fu la sommità di monti più alti di tutti i vicini; ed in una fu l'aria libera. Ma nella celebre salita areostatica de'signori Gay Lussac e Biot la diminuzion del calore fu tanto piccola, che non può conciliarsi con nessuna delle altre osservazioni. All'altezza di oltre a 1333 tese la differenza dei termometri non passò i tre gradi, ed a quella di 2000 tese fu poco più di cinque gradi e mezzo. I due Fisici che asceser col globo, ed ai quali son note anche le più minute circostanze del lor aereo viaggio, forse potranno formare qualche plausibil congettura sulle cagioni di questo singolar calore delle parti superiori dell'atmosfera. Ma della relazione di questo viaggio fatta dal sig. Biot all'istituto nazionale di Francia io non ho letto che un breve estratto, il qual si trova nel tomo primo della Nuova scelta d'opuscoli interessanti dell'anno 1804; pag. 180 e seguenti: e da questo raccolgo soltanto, che un vento settentrionale trasportò il globo alla distanza di 18 leghe in tre ore e mezzo. Or se questo vento, che suol portare un'aria più fredda, fosse stato assai più forte, e avesse cominciato a spirar prima vicin di terra che in alto, e' potrebbe aver lasciato nelle parti superiori dell'atmosfera una maggior quantità dell'aria portatavi ne'giorni precedenti da altri venti più caldi. Ma, qualunque

ne sia la cagione, il fenomeno è certamente straordinario, e non può per conseguenza nè distrugger nè alterare la regola della diminuzion del calore dedotta da tante osservazioni o perfettamente o molto concordi fra loro.

34. A questa regola ha fatto qualche ingegnoso cangiamento il sig. Kirwan nella sua bell'opera sulle variazioni dell'atmosfera. Io rapporterò quì ciò che ne dice il sig. Pictet nel terzo estratto dell'opera anzidetta alle pagine 322 e seguenti del tomo XXI della biblioteca britannica *scienze ed arti*.

„ De Saussure stabilisce, che dal grado 45 al 47 „ di latitudine, e nei mesi d'estate il calor medio dell'a- „ ria diminuisce d'un grado di Réaumur per ogni cen- „ to tese di salita nell'atmosfera cominciando dal livel- „ lo del mare; lo che fa un centesimo di grado per „ tesa, la qual regola se fosse esatta, sarebbe como- „ dissima nell'applicazione.

„ Ma l'autore le rimprovera con ragione, ch'ella „ suppone invariabile la diminuzion del calore, qualun- „ que sia la temperatura osservata alla stazion inferiore, „ vale a dire, che la colonna d'aria è simultaneamente „ modificata della stessa quantità, quando succede alla „ sua base un cangiamento di temperatura; la qual sup- „ posizione è contraria alle osservazioni; e l'autore ne „ reca la prova. Il modo con cui egli procede per ot- „ tenere un'approssimazione più esatta ci sembra mol- „ to ingegnoso. Egli cerca negli strati superiori dell'a- „ ria un punto, di cui sia nota la temperatura, ma la „ cui distanza dalla terra ugualmente nota, sia abbastan- „ za grande, perchè i cangiamenti di temperatura, se

„ alcuno ve n' ha a sì fatta altezza, non abbiano che „ un effetto insensibile sull'altezza totale. Supposto che „ sia nota (e ben tosto vedremo che lo è) la tempe- „ ratura di questo termine superiore, si stabilisce per „ osservazione la temperatura del termine inferiore: si „ ha così da una parte l'altezza della colonna d'aria; „ dall'altra la differenza di temperatura alle due stazio- „ ni della colonna medesima; e dividendo quest'altezza „ in un numero di parti eguali, e la differenza di tem- „ peratura in un numero di parti corrispondenti, si han „ gli elementi d'una progressione aritmetica così sem- „ plice come quella di de Saussure, ma ben più sicu- „ ra nell'applicazione.

„ Bouguer aveva già mostrato nel 1749 (*a*), esiste- „ re ad una certa altezza nell'atmosfera diversa secon- „ do le latitudini due punti, de' quali egli chiama uno „ il termin *superiore*, l'altro l'*inferiore* della congelazio- „ ne: il primo è quello, sopra il quale non s'alza mai „ alcun vapor sensibile; ed il secondo quello, ove gela „ tutte le notti anche in estate, e dove in quella sta- „ gione la temperatura non si alza che poco sopra il „ termine della congelazione. La temperatura costante „ di questi due punti è almeno di 32° F. o zero della „ scala comune.

„ Il termin superiore della congelazione è quello, „ che il sig. Kirwan sceglie per ultimo termine della „ progressione da stabilirsi: la determinazione della sua „ altezza a diverse latitudini era già stata l'oggetto

(*a*) Egli l'aveva già fatto nel 1744 in una memoria impressa nel volume di quell'anno dell'accademia delle scienze.

„ d'una particolar ricerca nell'opera, ch'egli pubblicò „ nel 1787 sulla temperatura del Globo. Egli ha poi „ introdotta una correzione per le latitudini superiori „ al grado 55 ; e la determinazione non si applica fuo- „ ri dei tropici se non nei mesi di maggio, giugno, lu- „ glio, e agosto. Nei mesi d' estate le due curve, che „ passano pel termine superiore e inferiore della con- „ gelazione, s'accostano; e siccome l'inferiore è la più „ mobile delle due, l' autore sceglie la superiore per „ termine fisso di paragone; e dopo d'aver preso da Bou- „ guer, da Saussure, e da altri Fisici i dati che som- „ ministran gli elementi di quest'approssimazione, egli „ ne costruisce una tavola, che quì trascriviamo lascian- „ dola in piedi inglesi.

Latit.	*Piedi inglesi*	*Latit.*	*Piedi inglesi*	*Latit.*	*Piedi inglesi*
0	28000	18	25221	32	20146
5	27784	19	24941	33	19800
6	27644	20	24661	34	19454
7	27504	21	24404	35	19169
8	27364	22	24147	36	18577
9	27224	23	23890	37	17985
10	27084	24	23633	38	17393
11	26880	25	23423	39	16801
12	26676	26	22906	40	16207
13	26472	27	22389	41	15712
14	26268	28	21872	42	15217
15	26061	29	21355	43	14722
16	25781	30	20838	44	14227
17	25701	31	20492	45	13730

Latit.	*Piedi inglesi*	*Latit.*	*Piedi inglesi*	*Latit.*	*Piedi inglesi*
46	13235	61	5068	76	4067
47	12740	62	4989	77	4015
48	12245	63	4910	78	3963
49	11750	64	4831	79	3911
50	11253	65	4752	80	3861
51	10124	66	4684	81	3815
52	8965	67	4616	82	3769
53	7806	68	4548	83	3723
54	6647	69	4480	84	3677
55	5617	70	4413	85	3631
56	5533	71	4354	86	3592
57	5439	72	4295	87	3553
58	5345	73	4236	88	3514
59	5251	74	4177	89	3475
60	5148	75	4119	90	3432

Supposta l'esattezza della sua tavola, il Kirwan insegna a determinare con una regola assai facile i gradi, che il termometro debbe avere a diverse altezze dell'atmosfera, ed a latitudini diverse quando sia data l'altezza del termometro alla stazion inferiore, e fatto il calcolo per 18 osservazioni scelte fra quelle di Bouguer, Saussure, Roy, e Phis fatte ad altezze e latitudini diversissime, espone in una tavola i risultati del calcolo paragonati colle osservazioni; la cui differenza non eccede per l'ordinario alcuni decimi di grado di Farheneit. In due casi la differenza sale ad alcuni gradi: uno di questi è l'osservazion dell'Etna, in cui giunge a sei gradi; ma pel Monbianco la differenza tra il

calcolo e l'osservazione, è giusta la tavola, di soli diciotto centesimi di grado Far.

35. Tali sono le asserzioni del Kirwan, che si leggono nella biblioteca britannica: resta a vedersi quanto sian conformi alla verità. Per venirne in chiaro vediam primieramente in che consista la regola dell'autore. Sia L una data latitudine; ed osservata in questa l'altezza T, che il termometro di Far. ha al livello del mare in un giorno estivo, si cerchi qual abbia ad esser l'altezza del termometro in uno strato superiore dell'atmosfera posto ad una data distanza dalla superficie del mare. Si trovi nella tavola la distanza della linea superiore della congelazione dal mare per la data latitudine L, e si chiami D. La differenza di temperatura per la distanza D, cioè dal mare alla linea di congelazione sarà dunque $T - 32°$; e per conseguente (se gli abbassamenti del termometro si fanno in progressione aritmetica, e son proporzionali alle altezze) ad ogni piede di altezza corrisponderà l'abbassamento $\frac{T-32°}{D}$. Ciò posto, se d è il numero de' piedi, pe' quali lo strato superiore dell'aria dista dal mare, l'abbassamento del termometro per quello strato sarà $\frac{(T-32°)\,d}{D}$. Dunque l'altezza, cui quel termometro fia ridotto, dovrà essere $T - \frac{(T-32°)\,d}{D}$.

Suppongasi ora, che il luogo, in cui si osserva il

termometro, sia più alto del mare della quantità A; ed è manifesto che la sua distanza dalla linea di congelazione non sarà più D, ma si ridurrà a $D-A$; e l'abbassamento del termometro per ogni piede di altezza sarà $\frac{T-32^\circ}{D-A}$. Dunque, chiamata δ la distanza d'uno strato superiore dell'atmosfera dal luogo dell'osservazione, l'abbassamento del termometro per lo stesso strato sarà $\frac{(T-32^\circ)\,\delta}{D-A}$, e sottratto questo da T, si avrà la temperatura cercata dello strato superiore.

Applichiam ora la regola all'osservazion del Monbianco; e riducendo le misure francesi a piedi inglesi ed i gradi di Réaumur a quelli di Farheneit, avremo $A=$ 1283, 163; $T=82^\circ, 85$; $\delta=14285, 3$. Per la latitudine di Ginevra, ch'è di circa 46° 10' avremo $D=13153$; $D-A=11869, 837$: e $T-32^\circ=50, 85$. L'abbassamento del termometro dovette per conseguenza essere $\frac{(50^\circ, 85)\,(14285, 3)}{11869, 837}=61^\circ, 198$; la cui differenza da 82°, 85, è 21°,652, altezza, che dovrebbe avere il termometro al livello della stazion superiore, laddove nell'osservazione fu di $-2^\circ, 3$ R. $=26^\circ, 325$ F. La differenza tra il calcolo e l'osservazione è dunque di 5°,173, non di 0°, 38, come dice il Kirwan. E si avverta che il grande ammasso di nevi e ghiacci, ond'è coperto il Monbianco, deve nell'osservazione aver diminuita l'altezza del termometro, e resa per conseguente minor del vero la

differenza suddetta. In fatti, se al livello della stazion superiore, ma fuori del raffreddamento locale della cima del monte, la temperatura dell'aria si sarà ridotta (come io ho già supposto nel num. 23) a $-1°$ R. $= 29°$, 75 F; la differenza dall' osservazione al calcolo risulterà di 8°, 098 F.

Il Kirwan non ha probabilmente avvertito, che la distanza della linea di congelazione dee prendersi dalla stazion inferiore, dove si è osservato il termometro, e non dalla superficie del mare. Ed invero, sostituendo nel calcolo precedente il valor di D a quello di $D - A$, si trova che l'altezza del termometro alla stazion superiore debb'essere 27°, 623; la cui differenza dall'altezza osservata è 0°, 798 poco maggiore di 0°, 38, differenza assegnata dall'autore.

Nell'osservazion dell'Etna, di cui suppongo la latitudine 37° 40', l'altezza del termometro al livello del mare fu 73°,62. La distanza D della linea di congelazione è in questo caso 17591; e quella della stazion superiore $d = 10691, 494$. L'abbassamento del termometro dovette adunque esser per la regola $\frac{(41°, 62)(10691, 494)}{17591} = 25°$, 296: e questo sottratto da 73°, 62 altezza del termometro inferiore, dà quella del superiore di 48°, 324. Ma il termometro sull'orlo del cratere dell'Etna fu a gradi 3°, 5 R. $= 39°, 875$ F. La regola del Kirwan dà quindi gradi 8, 449 più dell'osservazione, sebben questa siesi fatta in un luogo in cui l'aria doveva essere scaldata dalle esalazioni del vulcano, e diminuir la differenza. Anche l'autore confessa esser la sua regola in que-

sto caso alquanto difettosa; ma dice la differenza di 6° F. in luogo di 3° e quasi mezzo.

Questi risultati mi rendon alquanto dubbiosa la somma esattezza, che il dotto Fisico attribuisce alla sua regola; ma niente di positivo ardisco affermare; perchè i soli estratti del suo trattato delle Variazioni dell'atmosfera, che ho letti nella biblioteca britannica, non mi permetton di farlo.

36. Il principio del Kirwan può egualmente applicarsi alle due ipotesi del calor decrescente nelle due progressioni aritmetica e armonica; ed io, servendomi delle antiche misure francesi, e del termometro di Réaumur, lo farò nel modo seguente. Avverta però il lettore, che i numeri della tavola del Kirwan, cioè i piedi inglesi cangiansi in tese di Francia, moltiplicandoli per la frazione 0,156384. Colle tese francesi per unità si chiami, come dianzi, D la distanza della linea di congelazione dal mare per una data latitudine in estate. Sia T l'altezza del termometro in una stazione più alta del mare di tese A, e C il calore che gli corrisponde nelle tavole. Dovendo alla linea di congelazione esser $t = 0$, sarà $c = 1$. Si sostituiscan questi valori nella formola del calor decrescente in progressione aritmetica $c = C - m\,x$; e questa si cambierà in $1 = C - m\,(D - A)$. Sarà dunque $m = \frac{C-1}{D-A}$. Determinato il valor di m, si avrà tosto anche quello del calor c per una stazione, la cui distanza dall'inferiore sia d; e ciò per mezzo della formola $c = C - \frac{d\,(C-1)}{D-A}$.

Nell'osservazion del Monbianco fu $D = 2056,91$; $A = 200,66$; $D - A = 1856,25$; $C = 1,1198$; e $d = 2234$. Fatto il calcolo con questi dati, si trova $c = 0,9756$, cui corrisponde il grado -5; laddove nell'osservazione fu $= 2,3$, e senza il freddo locale della sommità del monte sarebbe forse stato -1. Con questo risultato la differenza tra il calcolo e l'osservazione è di $2°,7$ R. $= 6°,07$ F. non $5°,173$ come sopra l'abbiam trovato: ma questa differenza nasce dalle tavole del Roy, delle quali ho fatto uso nel calcolo. In fatti, supponendo le dilatazioni dell'aria uniformi, e di 0,005 per ogni grado di Réaumur, a gradi $22°,6$ corrisponde

$$C = 1,113; \quad \frac{d(C-1)}{D-A} = 0,136; \text{ e } c = 1,113 - 0,136 = 0,977 = 1 - 0,023;$$

cui nella supposizione di 0,005 di condensazione per ogni grado sotto il zero, corrispondono gradi $-4,6$. La differenza dal calcolo all'osservazione si riduce quindi a $2°,3$ R. $= 5°,175$ F. maggiore della già trovata non più che due millesimi di grado.

Nell'osservazion del Legnone, la cui latitudine è $46° 6'$ fu $D = 2059,42$; $A = 71,55$; $D - A = 1987,87$; $C = 1,1219$; e $d = 1280,7$. Or questi numeri sostituiti nella formola danno $c = 1,0434$; cui corrisponde $t = 8°,12$. Ma nell'osservazione fu $t = 11°,125$ maggiore di gradi 3,005.

Il Monte Generoso in fine è presso a poco alla latitudine $45°,56'$; alla qual corrisponde $D = 2074,9$. Quivi nell'osservazione fu $A = 108$; $D - A = 1966,9$; $C = 1,1046$; e $d = 769$. Or da questi dati risulta $c =$

1, 0637, e $t = 12°, 218$; laddove nell'osservazione fu $t = 14°$. In questo caso la differenza si riduce dunque ad $1°, 782$, o poco più d'un grado e tre quarti.

L'ipotesi del calor decrescente d'un grado per 100 tese di salita dà nell'osservazion del Monbianco $t = 22°, 6 - 22°, 34 = 0, 26$ maggior dell'osservato di $2°, 56$; laddove il risultato della regola del Kirwan è minore di $2°, 7$. Ma se il termometro al livello della stazion superiore e senza il freddo locale della cima del monte sarà stato a $-1°$, com'è verisimile, la regola del Kirwan darà gradi $3, 79$ di meno, e l'altra supposizione $1°, 26$ di più.

Al Legnone la stessa regola ha dato un eccesso di 3 gradi, e l'altra supposizione lo dà di $1°, 682$. Al Monte Generoso finalmente i risultati furon quasi eguali; poichè l'uno fu, come abbiam visto, $12°, 218$; e l'altro è $19°, 75 - 7°; 69 = 12°$. Ma si avverta che l'osservazione fu fatta alla metà di settembre; nel qual tempo la linea di congelazione può essere stata alquanto più bassa. Or ciò posto, la frazione $\frac{d(C-1)}{D-A}$ avrebbe avuto un denominatore un po' più piccolo, e per conseguente un valore un po' più grande; il quale sottratto da C diminuirebbe alquanto i valori di c, e di t.

La formola per la diminuzion del calore in progressione armonica è $c = \frac{C}{1 + m x}$ (num. 24); dalla qual si deduce $m = \frac{C - c}{c x}$. Ma la regola del Kirwan sup-

pone $c = 1$, ed $x = D - A$, e per conseguenza $m = \frac{C-1}{D-A}$ come nell'ipotesi del calor decrescente in progressione aritmetica. Pongo questo valore di m nella prima formola, e sostituisco d ad x. Da queste sostituzioni risulta $c = \frac{C}{1 + \frac{d(C-1)}{D-A}}$.

Applichiamo anche questa formola ai medesimi esempj. Nell'osservazion del Monbianco è $\frac{d(C-1)}{D-A} =$ 0,14418; d'onde viene $c = \frac{1,1198}{1,14418} = 0,9787$; al qual calore corrisponde $t = -4° \frac{1}{3}$ in luogo di $-2°,3$, o piuttosto di $-1°$. Con un simil calcolo si trova pel Legnone $c = \frac{1,1219}{1,07853} = 1,0402$, e $t = 7°,83$ in luogo di $11°,125$. E pel Monte Generoso è $c = \frac{1,1046}{1,0409} = 1,0612$; e $t = 11°,76$ in vece di $14°$.

Ma sostituendo nella formola $c = \frac{C}{1 + m x}$ il valor medio di m trovato al num. 24, cioè 0,00004666, si hanno i seguenti valori. Pel Monbianco $c = 1,0141$; $t = 2,8$. Pel Legnone $c = 1,0585$; $t = 11°,219$. Pel Monte Generoso $c = 1,0663$; $t = 12°,69$.

Il primo risultato pel freddo locale della sommità del monte è maggior del calore osservato, di gradi 5, 1; ma la differenza si riduce a 3°, 8 nella supposizion più probabile di $t = -1°$ in luogo di $-2°, 3$. Il secondo supera quello dell'osservazione poco più di 13 centesimi di grado; ed il terzo è minore del calor osservato di 1°, 31.

Per questi esempj non pare adunque, che il valor variabile di m determinato in ciaschedun caso particolare colla regola del Kirwan, sia da preferirsi ai medii e costanti dei num. 23 e 24, l'uno per la progressione aritmetica, e l'altro per l'armonica.

37. Ma se alcuno vorrà pur servirsi nelle livellazioni barometriche della regola anzidetta, egli il potrà fare ove si avverino le seguenti condizioni: I^a che sia nota l'altezza della stazion inferiore sopra il livello del mare: II^a che ne sia nota la latitudine: III^a che le osservazioni sian fatte in estate.

Ne serva d'esempio la solita osservazion del Monbianco; alla quale nessuna mancò delle indicate condizioni. In essa fu $C = 1, 1198$; $D - A = 1856, 25$; e quindi m, ch'è $= \frac{C-1}{D-A}$, vien ad essere $= \frac{0, 1198}{1856, 25} = 0, 00006454$. Essendo $B = 4013, 2$ pel num. 26, sarà $mB = 0, 25901$. Sarà in oltre $\frac{C}{m} = 17355, 8$. Sostituisco questi numeri nella formola $x = \frac{C}{m}\left(\frac{A^{mB} - a^{mB}}{A^{mB}}\right)$ e n'ho $x = 17355, 8\left(\frac{A^{0,25901} - a^{0,25901}}{A^{0,25901}}\right)$.

Nell'osservazione fu $A = 326,68$ lin., ed $a = 192,9$. Calcolo con questi dati, e trovo $A^{\circ,25901} = 4,479018$; $a^{\circ,25901} = 3,907724$. Finalmente, sostituiti nella formola tutti questi valori e fatto il solito calcolo, ne risulta $L\,x = 3\,.\,3451215$, ed $x = 2213,713$ tese, altezza minore della media geometrica di tese 20, 287; laddove il valor costante di $m = 0,00005$, come vedremo nella sezion seguente, ne dà 12,631 di più.

Per la progressione armonica già abbiam visto, esser il valore di m lo stesso che per l'aritmetica; onde avremo ancora $m = 0,00006454$, ed $\frac{1}{m} = 15494,36$. Sostituiti questi valori nella formola del num. 27, ella cangiasi nella seguente

$$x = 15494,36\left(-1 + \sqrt{(1 + L\,1,1934\,C\,L\frac{A}{a})}\right).$$

La somma dei logaritmi di 1, 1934, di C, e di $L\,\frac{A}{a}$ è 9 . 4853637; cui corrisponde il numero 0,305748. Sarà dunque $x = 15494,36\left(-1 + \sqrt{(1,305748)}\right) = 15494,36\,(0,1427) = 2211\,.\,46$ altezza minore della media geometrica di tese 22, 54. Alla fine del num. 27 abbiam trovato, che col valor costante di $m = 0,00004666$ risulta un'altezza maggiore della stessa media di tese 15, 44.

Nella solita osservazione del monte Saleve fu $D = 2056,91$; $A = 196$; $D - A = 1860,91$. In oltre le altezze corrette dei barometri furono in sedicesimi di li-

nea $A=5209$; $a=4632$; fu $C=1,0544$; $m=\frac{0,0544}{1860,91}=$ $0,00002923$: $mB=0,11731$. Or da questi valori si trae $A^{mB}=2,72867$; $a^{mB}=2,6913197$, e sostituiti tutti questi numeri nella formola $x=\frac{C}{m}\left(\frac{A^{mB}-a^{mB}}{A^{mB}}\right)$, si trova $Lx=2.6931884$, ed $x=493,3878$. Quest'altezza supera la livellata di tese 5, 61. Ma nella sezion seguente vedremo, che il risultato del calcolo fatto col valor costante di m dà l'altezza di tese 491, 3613, che supera la livellata di tese 3, 58.

Per la progressione armonica avremo ancora $m=0,00002923$, e sostituiti nella formola del num. 27 i valori di m, B, C, e $L\frac{A}{a}$, troveremo

$$x=34211,426\left(1+\sqrt{(1+(0,540211))(1,0544)(0,0509858)}\right)=$$

481, 2039 tese. Questo risultato è minore dell'altezza livellata di tese 6, 574; laddove quello del calcolo fatto col valor costante di m, pel num. 27, è maggiore di 3, 792.

Noi possiam dunque conchiudere al fine, che l'ipotesi del sig. Kirwan non è applicabile alle livellazioni barometriche per due terzi dell'anno e per tutti que' casi, ne' quali s'ignora quanto la stazion inferiore sia distante verticalmente dalla superficie del mare: che rende i calcoli assai più complicati e laboriosi; e finalmente che conduce a risultati men conformi alle mi-

sure geometriche ed alle livellazioni che quelli della nostra ipotesi di m costante.

Non voglio terminare la presente sezione senza correggere uno sbaglio, che m' è scorso nella prima parte di questa memoria. Al num. 28 calcolando il valor di c per l' esempio secondo, dopo d' aver trovato $mx = 0,0237966$, ho sottratta questa frazione da 1, 0544 valor di C; nel che mi sono ingannato; poichè per l' ipotesi della progressione armonica l'espressione di c è $\frac{C}{1+mx}$, non $C-mx$. Il vero valor di c è dunque $\frac{1,0544}{1,0237966} = 1,0299$, e non 1, 0306034, come ho detto nel luogo citato. Facciasi questa correzione nel calcolo dell'esempio secondo, e si troverà $L\frac{2Cc}{C+c} = 0$, 0178703 in luogo di 0, 0180194; ed $x = 491,354$, non 491, 523, ov'è da avvertire, che per un' altra svista alla pagina 407 lin. 14 si è posto 323. Il mio sbaglio non è dunque in questo caso d' alcun momento; poichè la differenza tra i due risultati si riduce a 169 millesimi di tesa o poco più d'un piede. Ma in altri casi la differenza può essere assai maggiore; e quando anche non fosse, lo sbaglio dev' esser corretto. Fatto il calcolo dell' osservazion del Monbianco col vero valor di c, che è 1, 011875, si trova $x = 2247,486$; ma dal valore inesatto 1, 0134 risulta $x = 2254, 56$ maggiore di tese 7, 073.

SEZIONE VI

Dell'ipotesi del calor medio uniforme

38. Benchè le formole dei num. 26 e 27 dian esattamente le altezze corrispondenti alle due ipotesi del calor decrescente in progressione aritmetica e armonica, ed ai valori di B ed m determinati colle osservazioni; esse hanno non per tanto l'inconveniente di condurre a calcoli alquanto laboriosi. Ma se per abbreviarli non cureremo la differenza di qualche frazion di tesa nei risultati, il potrem fare quanto all'ipotesi della progressione armonica col metodo del num. 28, e quanto a quella della progressione aritmetica calcolando in primo luogo il calor conveniente alla stazion superiore; e poi supponendo che il calore della colonna d'aria da misurarsi sia in tutta la lunghezza della detta colonna uniforme, ed uguale al medio aritmetico fra i calori delle due estremità. Or dati i due calori C, c, il lor medio aritmetico è $\frac{C+c}{2}$; e se questo fosse $=1$, cioè se il calor medio corrispondesse alla temperatura del ghiaccio che si scioglie, la formola sarebbe $x=9240,7\,L\frac{A}{a}$ esprimendo per A ed a le due altezze corrette dei barometri. Or la colonna d'aria, la cui lunghezza è data da questa formola, si allungherà se $\frac{C+c}{2}$ è maggio-

re dell'unità, si accorcerà se è minore; e l'allungamento o l'accorciamento si determinerà moltiplicandola per $\frac{C+c}{2}$. Ciò posto, ognun vede che la formola diverrà

$$x = 9240\,,7\ (\frac{C+c}{2})\,L\frac{A}{a}\,.$$

Facciamone l'applicazione ai soliti esempj dei monti Saleve e Bianco. Pel monte Saleve moltiplico la differenza logaritmica 510 per 0,00005, e sottraggo il prodotto 0,0255 da 1,0544 calore della stazion inferiore, e n' ho il valor di c uguale ad 1,0289. Sarà dunque $\frac{C+c}{2} = 1\,,04165$ e $L\,\frac{C+c}{2} = 0\,.\,0177010$. Con questi dati fassi il calcolo seguente

$$L\,(L\frac{A}{a}) = 8\,.\,7074492$$

$$L\,(\frac{C+c}{2}) = 0\,.\,0177010$$

$$L\,coeff = 3\,.\,9657049$$

$$L\,x = 2\,.\,6908551$$

$$x = 490\,,744\,.$$

Pel Monbianco la differenza logaritmica è 2288; il calor $C = 1\,,1198$; e quindi $c = 1\,,1198 - (2288)\,(0\,,00005) = 1\,,0054$; e $\frac{C+c}{2} = 1\,,0626$. In questo caso abbiam dunque

$$9 \,.\, 3594372$$
$$0 \,.\, 0263698$$
$$3 \,.\, 9657049$$

$$L\,x = 3 \,.\, 3515119$$
$$x = 2246 \,,\, 529$$

Nell'osservazion dell'Etna le altezze corrette dei barometri furono in sedicesimi di linea $A = 5394$, $a = 3631$; la differenza logaritmica $= 1719$; $T = 18 \,.\, 5$; e $C = 1$, 0981. Fu dunque $c = 1 \,,\, 0981 - (1719)\,(0 \,,\, 00005) = 1$, 01215; e $\frac{C+c}{2} = 1 \,,\, 05512$. Ciò posto, si ha col solito calcolo

$$9 \,.\, 2352372$$
$$0 \,.\, 0233018$$
$$3 \,.\, 9657049$$

$$L\,x = 3 \,.\, 2242439$$
$$x = 1675 \,,\, 883$$

Per trovar la differenza tra questi risultati e quei della formola del calor decrescente in progressione aritmetica

$$x = 20000\,C\left(\frac{A^{\circ\,,\,20066} - a^{\circ\,,\,20066}}{A^{\circ\,,\,20066}}\right)$$

si facciano i calcoli coll' esponente intero $0 \,,\, 20066$; e si troverà pel monte Saleve $A^{\circ\,,\,20066} = 5 \,,\, 568$

$$a^{\circ\,,\,20066} = 5 \,,\, 4382027 \,,$$

e la differenza loro = 0 , 1297973. Ciò posto, faremo il calcolo seguente

$$L\ differ. = 9\ .\ 1130649$$
$$Compl.\ L\ A^{0\,,\,20066} = 9\ .\ 2543009$$
$$L\ 10000\ C = 4\ .\ 0230054$$
$$L\ 2 = 0\ .\ 3010300$$
$$L\ x = 2\ .\ 6914012$$
$$x = 491\ ,\ 3616$$

La differenza tra i due risultati è dunque di tese 0,6176, o alquanto più di mezza tesa.

Per l' osservazion del Monbianco è

$$A^{0\,,\,20066} = 3\ ,\ 195095$$
$$a^{0\,,\,20066} = 2\ ,\ 8745825$$

e la differenza = 0 , 3205125

In questo caso il calcolo è dunque

$$9\ .\ 5058450$$
$$9\ .\ 4955162$$
$$4\ .\ 0491405$$
$$0\ .\ 3010300$$
$$L\ x = 3\ .\ 3515317$$
$$x = 2246\ ,\ 631$$

Questo risultato supera l' altro di poco più d' un decimo di tesa

Nell' osservazion dell' Etna finalmente si ebbe

$$A^{\circ\,,\,20066} = 5\,,\,6085$$

$$a^{\circ\,,\,20066} = 5\,,\,1803\,,$$

e la differenza $= 0\,,\,4282$
Ciò posto, abbiamo

$$9\,.\,6316467$$
$$9\,.\,2511547$$
$$4\,.\,0406419$$
$$0\,.\,3010300$$

$$L\,x = 3\,.\,2244783$$

$$x = 1676\,,\,773$$

Questo risultato è maggior dell' altro di tese 0, 89; cioè di quasi 9 decimi d' una tesa.

39. La formola generale del calor medio uniforme è $x = Bl\,10\,(\frac{C+c}{2})\,L\frac{A}{a}$; la quale, nella presente ipotesi di $c = C - 10000\,(0\,,\,00005)\,L\frac{A}{a}$ si riduce ad $x = Bl\,10\,(C - \frac{1}{4}L\frac{A}{a})\,L\frac{A}{a}$. Or questa formola si cangia in $x = 10000\,L\frac{A}{a}$, se $C - \frac{1}{4}L\frac{A}{a}$ è $= \frac{10000}{Bl\,10}$. Ogni volta adunque che questa condizion si verifichi, sarà $x = 10000\,L\frac{A}{a}$, vale a dire, che la differenza logaritmica moltipli-

cata per diecimila darà immediatamente l'altezza in tese. Nella mia formola $B\,l\,10$ è $=9240,7$: onde segue, che $\frac{10000}{B\,l\,10}$ è $=1,082169$. Ora, se per esempio nell'osservazion dell'Etna essendo $A=5394$ fosse stato $a=3667$; $T=23°,416$, e per conseguente $C=1,1240661$, si sarebbe trovato $C-\frac{1}{4}L\frac{A}{a}=1,082169$, qual è appunto il valore di $\frac{10000}{B\,l\,10}$. In questo caso sarebbe dunque $x=10000\,L\frac{5394}{3667}=1675,883$; che è l'altezza medesima trovata di sopra.

Il De Luc, ed i due Fisici inglesi, che han seguito il suo esempio, han date alcune formole, le quali, come vedremo parlando dei metodi comunemente chiamati indiretti, posson ridursi alla seguente, che tutte le abbraccia.

$$(\mathrm{F})\quad x=10000\left(1+\frac{T+t-2\,T'}{2\,n}\right)L\frac{A}{a}.$$

In questa T e t esprimon le temperature attualmente osservate alle due stazioni; A ed a le altezze corrette dei barometri; in fine T' ed n son numeri costanti, che ciascuno dei Fisici anzidetti ha determinati colle proprie osservazioni.

Quando la temperatura media $\frac{T+t}{2}$ è $=0$, la formola

si cangia in $x = 10000\,(\frac{n-T'}{n})\,L\frac{A}{a}$; ed è propria della temperatura del ghiaccio, che si scioglie.

Sia ora $\frac{T+t}{2} = T'$, e si chiami E l'espansion dell'aria corrispondente a questa temperatura. Ciò posto, il valor d'x dell' ultima formola dovrà esser moltiplicato per $1 + E$ quando si voglia trasportarla alla temperatura T'; e ne verrà $x = 10000\,(\frac{n-T'}{n})\,(1+E)\,L\frac{A}{a}$. Ma quando è $\frac{T+t}{2} = T'$, la formola primitiva F si cangia in $x = 10000\,L\frac{A}{a}$. Sarà dunque $10000\,(\frac{n-T'}{n})\,(1+E) = 10000$, o sia $(\frac{n-T'}{n})\,(1+E) = 1$; e per conseguenza $1 + E = \frac{n}{n-T'}$. L' espansione E è dunque $= \frac{n}{n-T'} - 1 = \frac{T'}{n-T'}$. E quindi, se si suppone uniforme, essa fia per ogni grado $= \frac{T'}{T'(n-T')} = \frac{1}{n-T'}$. La formola generale per qualunque temperatura media uniforme $\frac{T+t}{2}$ sarà dunque della forma seguente

$$(F')\quad x = 10000\,(\frac{n-T'}{n})\left(1 + \frac{T+t}{2(n-T')}\right)L\frac{A}{a}.$$

Secondo il sig. De Luc n è $= 215$, e $T' = 16°,75$. Si sostituiscan questi numeri, e si troverà $\frac{n - T'}{n} = \frac{198,25}{215} = 9220,93$; $\frac{1}{n - T'} = \frac{1}{198,25} = 0,0050441$; e la formola diverrà $x = 9220,93 \left(1 + (0,0050441) \frac{T + t}{2}\right) L \frac{A}{a}$.

Al num. 16 abbiam trovato, che le osservazioni del De Luc danno l'espansion uniforme per ogni grado $= 0,0050435$; ma si avverta, aver noi allora supposto per semplicità maggiore, che $1 - \frac{16,75}{215}$ sia $= 0,9221$ in luogo di $0,922093$, ch'è il vero valore della frazione.

Per facilitare i calcoli, la formola precedente può ridursi senza verun sensibil errore a quest'altra forma $x = 9221 \left(1 + (0,005) \frac{T + t}{2}\right) L \frac{A}{a}$. Or, se in questa cangeremo le tese in metri, ognun de' quali corrisponde a tese $0,513074$ (Laplace. Esposizione del sistema del mondo; seconda edizione; pag. 72) ed ai gradi della solita scala del termometro sostituirem quelli della scala centenaria, ne avremo per risultato $x = 17972,058 \left(1 + \frac{4}{5}\right.$ $\left.(0,005) \frac{T + t}{2}\right) L \frac{A}{a}$; cioè quella formola appunto, che il sig. Laplace descrive al principio del capo XIV, libro I dell'opera pur or menzionata, colla sola differen-

za di 0,1 in luogo di 0,058. Io credo adunque, che questo gran matematico, non avendo osservazioni proprie per determinar il coefficiente della formola generale $x = D A' l. 10 \left(1 + \left(\frac{T+t}{2}\right) E\right) L \frac{A}{a}$, e credendo, che la regola del De Luc desse le altezze molto vicine alle vere, l'abbia primieramente trasportata dalla temperatura 16°,75 a quella del ghiaccio, che si scioglie, e poi vi abbia fatti i cangiamenti posti qui sopra per adattarla alle nuove misure francesi. Resta a vedersi per qual ragione alla pag. 81 della stess'opera egli dica quanto segue "alla temperatura del ghiaccio, che si „ scioglie, ed all'altezza media del barometro al livel„ lo del mare, altezza ch'è presso a poco di 76 centi„ metri, il peso dell'aria è a quello d'un egual volu„ me di mercurio nel rapporto dell'unità a 10283." Ma la detta ragione si troverà agevolmente, osservando che questo rapporto è un'immediata conseguenza dell'equazione $D A' l\ 10 = 17972,1$; poichè ponendo in questa A' eguale non esattamente a 76 centimetri, ma a 759 millimetri, ne risulta $D = \frac{17972,1}{0,759\ l\ 10} = 10283$.

Il sig. Ramond ha accresciuto il coefficiente 17972,1 portandolo a 18393; e l'autor della formola ha approvato il cangiamento. Questo a parer mio fu fatto dal Ramond per la ragion seguente. Egli dice, esser opinion generale dei Fisici, che la regola del De Luc da le altezze minori delle vere di un quarantatreesimo. Non è dunque da maravigliarsi, ch'egli abbia in questa proporzione accresciuto il coefficiente 17972,1; il che lo por-

ta a 18390. E per farlo più esattamente corrispondere alle osservazioni, ch'egli medesimo ha fatte ne' Pirenei, lo ha ancora accresciuto di tre unità.

Ma si avverta, che il coefficiente così accresciuto cangia il rapporto dei pesi specifici dell'aria e del mercurio, posto qui sopra, e lo riduce a quello di 1 : 10519, 49 in vece di 1 : 10283. Ben si vede per ciò, che se il Laplace avesse stabilito il suo rapporto sopra qualche esatto sperimento, egli non avrebbe potuto approvare il nuovo coefficiente del Ramond, che lo cambia sensibilmente.

La formola F' si cangia in $x = B\,l\,10\,(\frac{C+c}{2})\,L\frac{A}{a}$ sostituendo $B\,l\,10$ a $10000(\frac{n-T'}{n})$ e $\frac{C+c}{2}$ a $\frac{T+t}{2(n-T')}$. Per le osservazioni dei tre Fisici accennati la formola del calor medio uniforme $x = B\,l\,10\,(\frac{C+c}{2})\,L\frac{A}{a}$ può dunque applicarsi a que' casi eziandio, ne' quali $\frac{C+c}{2}$ è il calor medio aritmetico fra quelli, che alle due stazioni si sono attualmente osservati.

40. Vediam ora se questa formola s' accordi esattamente coll'ipotesi del calore aritmeticamente diminuito dal basso all' alto. Per siffatta ipotesi deggion verificarsi queste due equazioni

I^a $\quad c = C - m\,x$

II^a $\quad x = \frac{C}{m}\left(\frac{A^{mB} - a^{mB}}{A^{mB}}\right)$

Per la prima abbiamo $m = \frac{C-c}{x}$; e questo valor di m sostituito nella seconda la riduce ad $x = \frac{Cx}{C-c}\left(\frac{A^{mB}-a^{mB}}{A^{mB}}\right)$, o sia $\frac{C-c}{C} = 1 - \frac{a^{mB}}{A^{mB}}$ equivalente a $\frac{c}{C} = \frac{a^{mB}}{A^{mB}}$, ovvero $\frac{C}{c} = \frac{A^{mB}}{a^{mB}}$. Ciò posto, prendo i logaritmi, e n' ho $LC - Lc = mBL\frac{A}{a} = (\frac{C-c}{x})BL\frac{A}{a}$. Sarà dunque $x = \frac{B(C-c)}{LC-Lc}L\frac{A}{a}$. Ma per l'ipotesi del calor medio uniforme è $x = Bl\,10\,(\frac{C+c}{2})L\frac{A}{a}$. Affinchè le due formole diano il medesimo risultato deve adunque essere $\frac{(C-c)B}{LC-Lc} = \frac{Bl\,10\,(C+c)}{2}$, ossia $\frac{2(C-c)}{C+c} = l\,10\,(LC-Lc)$. Or ciò vuol dire, che la formola del calor uniforme non può esser perfettamente d'accordo con quella del calor decrescente in progressione aritmetica, se non si verifica la seguente condizione: *che la differenza dei logaritmi neperiani dei calori C, c sia eguale al doppio della differenza dei calori medesimi divisa per la lor somma.*

Questa condizione per verità non potrà mai nelle livellazioni barometriche perfettamente verificarsi; ma in esse la differenza tra le due quantità, che dovrebber esser uguali, non giungerà mai a due diecimillesime; e

quindi anche per altezze assai grandi la massima differenza fra i risultati delle due formole sarà di poche tese.

Suppongasi $T = 25°, t = 23°$; e per conseguente

$C = 1,1323; c = 1,1219$; e sarà $\frac{2(C-c)}{C+c} = 0,0092272$,

o $l\,10\,(L\,C - L\,c) = 0,0092274$. La differenza sarà dunque di due soli diecimilionesimi; ed in qualunque livellazione fatta a queste due temperature niuna sensibil differenza potrà aver luogo tra i due risultati.

Ma supposto $T = 15°, t = -5°$; il che potrà avvenire a distanze verticali di circa 2000 tese, sarà $C = 1,0791$; $c = 0,9755$; onde avremo $\frac{2(C-c)}{C+c} = 0,1008463$, e $l\,10\,(L\,C - L\,c) = 0,1009324$. Quì dunque la differenza è 0,0000856 minore di un diecimillesimo, quantunque sia una delle grandi. Ma questa così picciola differenza potrà influire alcun poco su quella dei risultati delle due formole, e farla salire ad una o due tese.

Finalmente dalla supposizione di $T = 25°, t = 0$ trarremo $C = 1,1323$, e $c = 1$. Or da questi dati risulta $\frac{2(C-c)}{C+c} = 0,12409135$, e $l\,10\,(L\,C - L\,c) = 0,12425326$; cosicchè la differenza, ch' è una delle massime per le temperature delle livellazioni barometriche, è $= 0,00016191$, e non giugnè per conseguenza a due diecimillesime.

Calcoliam ora due osservazioni, che supporrò fatte alle temperature de' primi due casi precedenti. Sia nel-

la prima $A = 28$ pollici; $a = 26,813$; $C = 1,1323$; $c = 1,1219$. Con questi dati avremo per la formola del calor uniforme

$$L\left(L\frac{A}{a}\right) = 8 \,.\, 2744412$$

$$L\frac{(C+c)}{2} = 0 \,.\, 0519624$$

$$L\,coeff = 3 \,.\, 9657049$$

$$L\,x = 2 \,.\, 2921085$$

$$x = 195,93341 .$$

Per l' ipotesi del calor variabile aritmeticamente abbiam trovato quì sopra esser $x = \frac{B(C-c)}{LC-Lc} L\frac{A}{a}$; e per conseguente $Lx = LB + L(C-c) + L\frac{A}{a} - L\frac{C}{c}$. Sostituisco i valori di B, A, a, C, c; e ne ho

$$LB = 3 \,.\, 6034908$$

$$L(C-c) = 8 \,.\, 0170333$$

$$L\left(L\frac{A}{a}\right) = 8 \,.\, 2744412$$

$$\text{Somma} = 9 \,.\, 8949653$$

$$-L\frac{C}{c} = -7 \,.\, 6028627$$

$$L\,x = 2 \,.\, 2921026$$

$$x = 195,93076$$

La differenza tra i due risultati è dunque di tese 0,00265, vale a dire che non arriva ad un quinto di pollice.

Nella seconda osservazione suppongo $A = 28$ pollici; $a = 17,238$; $C = 1,0791$; $c = 0,9755$. Ciò posto, avrò il seguente calcolo per la formola del calor uniforme

$$\begin{array}{r} 9 \,.\, 3236070 \\ 0 \,.\, 0116973 \\ 3 \,.\, 9657049 \\ \hline L\,x = 3 \,.\, 3010092 \\ x = 1999,904 \end{array}$$

Ma per la formola del calore aritmeticamente diminuito avrò calcolando come nel primo caso

$$\begin{array}{r} 3 \,.\, 6034908 \\ 9 \,.\, 0153598 \\ 9 \,.\, 3236070 \\ \hline 1 \,.\, 9424576 \\ -\ 8 \,.\, 6418151 \\ \hline L\,x = 3 \,.\, 3006425 \\ x = 1998,216 \end{array}$$

Qui la differenza dei due risultati è di tese 1,688, o alquanto più d'una tesa e due terzi.

Finora ho supposte variabili le espansioni dell'aria, e quali son nella tavola posta in fine della prima

parte. Ma nella supposizione, che sieno uniformi, chiamata E l'espansione per ogni grado, sarà $C = 1 + ET$, e $c = 1 + Et$. Ciò posto, l'equazion di condizione

$\frac{2(C-c)}{C+c} = l\,10\,L\frac{C}{c}$ si cangerà in $\frac{2E(T-t)}{2+E(T+t)} = l\,10\,L\left(\frac{1+ET}{1+Et}\right)$

41. Il De Luc parlando delle supposizioni, ch' egli avea fatte per istabilir la sua formola, così si esprime nei numeri 657, 658 delle Ricerche sulle modificazioni dell'atmosfera. " Rari sono i casi, ne' quali ragionevol- „ mente si possa credere, che il calore indicato dal ter- „ mometro esposto all'aria libera nella stazion superio- „ re sia uguale al calore dell'aria posta all'altezza me- „ desima sopra la stazione inferiore. Questa è però una „ delle condizioni necessarie per l'esattezza; poichè l'os- „ servazion del termometro superiore ha da concorrere „ a determinare il calor medio della colonna d'aria, che „ dalla stazion inferiore s' innalza verticalmente fino „ all'altezza, che corrisponde orizzontalmente alla supe- „ riore.

„ Ma supposto ancora, che per le osservazioni del „ termometro fatte alle due stazioni sia noto esatta- „ mente il grado di calore delle estremità della colon- „ na aerea da misurarsi, resta a sapere se la diminu- „ zion del calore dal basso all'alto sia in progressione „ aritmetica *come io per maggior facilità ho supposto* „ *nel calcolo*. „

Da quest' ultime parole chiaramente apparisce, avere il De Luc creduto, che la sua formola, essendo

calcolata pel calor medio uniforme, supponga la diminuzion del calore in progressione aritmetica. Nè in questo si può dire, ch'e' siasi ingannato; poichè i casi, in cui le due ipotesi del calor medio uniforme e del variabile in progressione aritmetica conducono ad una sensibil differenza nelle altezze calcolate, non si trovano in alcuna delle sue molte osservazioni; ed in generale son d'un'estrema rarità. Anzi anche in questi la differenza si riduce ad una o due tese per le massime altezze, che col barometro si posson misurare. Ma non può dirsi neppure, che la sua supposizione sia vera in tutto il rigor geometrico; poichè la precedente equazion di condizione non può verificarsi con una perfetta esattezza se non è $T = t$, nel qual caso il calor è costante in tutta l'altezza da misurarsi; ed è per conseguenza esclusa ogni diminuzion di calore.

Anche il celebre Lagrange ha dimostrato nelle mèmorie dell' accademia di Berlino del 1772 (pagine 264, 265) che la supposizione del sig. De Luc non si verifica fuorchè per approssimazione. Egli chiama a l' altezza d' una data stazione sopra il livello del mare, x quella di qualunque altra stazione più alta sopra lo stesso livello, e il numero dei gradi del termometro di Réaumur sopra o sotto 16°, 75 alla stazion inferiore, t il numero variabile degli stessi gradi sopra o sotto 16°, 75 nel termometro dell' altezza variabile x; e con un facile ma ingegnoso calcolo dimostra, che la regola del Fisico Ginevrino conduce alla seguente equazione

$$x - a = k\,(t - c)\left(1 + \frac{c + t}{2 \cdot 215}\right),$$

nella quale k è una costante corrispondente alla condizione, che t divenga c quando è $x = a$. Ora egli osserva, che questa condizione fa per se sola verificar l' equazione quando si vuole determinar la costante, poichè allora così $x - a$ come $t - c$ sono $= 0$. E da quest' osservazione ei conchiude esser chiaro, che la costante rimane arbitraria. Finalmente egli aggiunge: „ se in paragone dell' unità si negligenta il termine „ $\frac{c+t}{2.215}$, si ha $t - c = \frac{x-a}{k}$, vale a dire che le differenze di calore son proporzionali alle differenze „ d'altezza; talchè, prendendo le altezze in progressione aritmetica, anche i gradi di calore il saranno; ma „ si vede per la nostra formola, che questa legge, la „ qual è pur quella del sig. De Luc, non è vera che „ per approssimazione. „

La conchiusione è esatta e simile a quella, che anch' io ho dedotta dalla mia equazion di condizione; ma questa parmi, che abbia in oltre il vantaggio d' indicar presso a poco quanta possa esser la differenza fra i risultati delle due ipotesi del calore o medio e uniforme o variabile su tutta l'altezza in progressione aritmetica. Nell' osservazion del Monbianco per esempio fu $T = 22°,6$; $t = -2°,3$; ed applicando a questa la regola del De Luc, dee porsi $E = 0,0050441$. Ora da questi dati risulta $\frac{2(T-t)E}{2+(T+t)E} = 0,11948090$; e l 10 $L\frac{1+TE}{1+tE} = 0,11962102$. Dall' equazion di condizio-

ne nasce dunque una differenza alquanto maggiore di 14 centomillesime, la qual indica, che tra i risultati delle due ipotesi troverassi una differenza di circa due tese.

Per chiarircene calcoliamo l' altezza colla formola del DeLuc, che suppone il calor medio uniforme; ed è pel num. 39

$$x = 9220,93\ (1 + (0,0050441)\ \frac{T+t}{2})\ L\frac{A}{a}.$$

Nell' osservazione fu $A = 326,68$ lin; $a = 192,9$; e dai valori di T, t, E si raccoglie esser $\frac{(T+t)}{2} E = 0,0511576$. Col solito calcolo avrem dunque

$$L\left(L\frac{A}{a}\right) = 9\ .\ 3594372$$

$$L(1,0511976) = 0\ .\ 0216843$$

$$L\ coeff. = 3\ .\ 9647747$$

$$L\ x = 3\ .\ 3458962$$

$$x = 2217,666.$$

Si faccia il calcolo anche colla formola

$$x = \frac{B(T-t)E\,L\frac{A}{a}}{L(1+TE) - L(1+tE)}$$

e si troverà

$$L\,B = 3\,.\,6034908$$

$$L\,(T-t)\,E = 9\,.\,0989830$$

$$L\,(\,L\,\frac{A}{a}\,) = 9\,.\,3594372$$

$$\text{Somma} = 2\,.\,0619110$$

$$-L\,\frac{1+TE}{1+tE} = -\,8\,.\,7156018$$

$$L\,x = 3\,.\,3463092$$

$$x = 2219\,,\,776$$

La differenza tra i risultati delle due formole è dunque di tese 2, 11 qual presso a poco la fa prevedere l'equazion di condizione.

42. Fin qui ho parlato del calor decrescente in progressione aritmetica: dirò ora alcuna cosa anche intorno all'ipotesi della diminuzion del calore in progressione armonica. La formola del num. 27 corrispondente a quest'ipotesi è

$$(\mathrm{F})\quad x = \frac{-1+\sqrt{(1+2\,B\,C\,m\,l\,10\,L\,\frac{A}{a})}}{m}$$

e questa equivale perfettamente ad

$$(\mathrm{F}')\quad x = (\frac{2\,C\,c}{C+c})\,B\,l\,10\,L\,\frac{A}{a}$$

cioè ad una formola, che suppone il calor uniforme, e medio armonico fra quelli delle due stazioni. Imperocchè, pel calor decrescente in progressione armoni-

ca è $c = \frac{C}{1 + m x}$, ed $m = \frac{C - c}{c x}$. Or, sostituito questo valor di m nella formola F, risulta

$x = \frac{c x}{C - c}\left(-1 + \sqrt{(1 + 2 B C(\frac{C - c}{c x}) l 10 L \frac{A}{a})}\right)$; ossia

$\frac{C - c}{c} = -1 + \sqrt{(1 + 2 B C (\frac{C - c}{c x}) l 10 L \frac{A}{a})}\Big)$, o

$\frac{C}{c} = \sqrt{\left(1 + 2 B C (\frac{C - c}{c x}) l 10 L \frac{A}{a}\right)}$, e quadrando,

$\frac{C^2}{c^2} = 1 + 2 B C (\frac{C - c}{c x}) l 10 L \frac{A}{a}$. Sarà dunque

$(\frac{C^2 - c^2}{c^2})(\frac{c x}{C - c}) = 2 B C l 10 L \frac{A}{a}$; ovvero

$(\frac{C + c}{c}) x = 2 B C l 10 L \frac{A}{a}$; e finalmente

$x = (\frac{2 C c}{C + c}) B l 10 L \frac{A}{a}$.

Quello che per la progressione aritmetica è vero soltanto per approssimazione, si verifica dunque esattamente per la progressione armonica; e quindi, volendo far uso dei calori osservati alle due stazioni, il calcolo delle altezze fatto colla formola F' del calor medio armonico ed uniforme sarà assai più semplice; ma non però meno esatto di quello della formola F corrispondente al calor variabile in tutta l'altezza da misurarsi.

SEZIONE VII

Della misura delle profondità sotterranee.

43. Nelle profondità sotterranee convien distinguer quelle, in cui l'aria esterna non può circolare, da quelle, in cui circola più o men liberamente. Della prima specie son alcune cantine, come quelle dell'osservatorio di Parigi, ed alcuni pozzi scavati ad una gran profondità per trovar acque o miniere, ma poi per l'inutilità loro abbandonati, come quello che chiamasi *il buco di Bouillet* non guari distante dalla foce del Rodano nel Lago Lemano o di Ginevra. Nel fondo delle cantine dell' osservatorio la temperatura è costantemente di gradi 9, 6, come si può vedere nelle Ricerche del De Luc sulle modificazioni dell' atmosfera num. 441 *x*. La temperatura costante comincerà probabilmente ad una minor profondità; anzi questa profondità medesima varierà alquanto per le variazioni del calore nell'aria esterna: ma io non so, che intorno a questo siesi fatta veruna osservazione. In questa incertezza non è chi non vegga esser impossibile il misurare le varie profondità di quelle cantine colle formole barometriche, le quali suppongon tutte il calor dell' aria o uniforme o con una certa legge variabile nell'intera colonna d'aria, che si vuol misurare.

Sia P la profondità d' un sotterraneo, alla quale il calore sia costantemente $= C$; p la profondità, alla qual comincia il calor costante; A l' altezza del barometro ad una profondità x minor di P e maggior di

p; a l'altezza del barometro all'ingresso del sotterraneo; e suppongasi che il calor c dell'aria esterna sia minor di C. Per determinare il valor d'x cerco in primo luogo qual altezza avrebbe un barometro trasportato nel sotterraneo alla profondità p. Chiamo y la detta altezza; e per la formola del calor medio uniforme posta nella precedente sezione mi risulta

$p = 9240,7\,(\frac{C+c}{2})\,L\frac{y}{a}$; dalla quale traggo $L\,y = \frac{2p}{9240,7\,(C+c)} + L\,a$. Se p fosse una quantità nota, si troverebbe il numero corrispondente a questo logaritmo; e potrebbe chiamarsi a'. Alla profondità x ho supposta A l'altezza del barometro, ed ho chiamato C il calore uniforme in tutta l'altezza $x = p$. Sarà dunque $x - p = (9240,7)\,C\,L\frac{A}{a'}$, ed $x = (9240,7)\,C\,L\frac{A}{a'} + p$.

Or quest'equazione dimostra chiaramente, che il valor d'x dipende da quello di p: onde segue non potersi determinare la profondità x, se non è nota quella, a cui comincia il calor costante.

Ma le temperature dell'interno della terra van probabilmente diminuendo col crescer delle profondità fino ad un certo limite prima di farsi costanti; lo che apertamente si deduce dalle osservazioni del sig. de Saussure sulle temperature del fondo dei laghi, ch'ei dice aver sempre trovate molto inferiori a quella di 10 gradi, e poco distanti da 4°. Ed io in alcune di quelle cantine de' nostri monti, che volgarmente si chiaman

crotti; e nelle quali dall' interior del monte, ove sono scavate, entra per uno o più spiragli una corrente d'aria fredda, mi ricordo d'aver osservato, che il termometro presso lo spiraglio era alla temperatura di due o tre gradi nel tempo stesso, che fuor dell'uscio della cantina era a più di venti gradi. Come potremmo noi dunque misurar col barometro le profondità, in cui l'aria esterna non circola senza saper la legge, giusta la quale col crescer delle profondità le temperature si vanno abbassando? Si avverta in oltre, che a tanta incertezza un'altra se n'aggiugne assai maggiore; cioè che questa diminuzion medesima non sempre ha luogo; poichè in alcuni sotterranei il calor cresce discendendo in vece di diminuire. Nel buco di Bouillet per esempio, che dianzi ho citato, profondo di 677 piedi e 3 pollici, Saussure trovò la temperatura del fondo di 13°, 9; la qual supera di 4°, 3 quella delle cantine dell' osservatorio di Parigi, sebben la profondità loro sia di circa 100 piedi e per conseguente minore d'assai. Ma; per le osservazioni dello stesso Fisico, in una galleria superiore, e distante 113 piedi 3, pollici dal fondo del pozzo la temperatura fu di 12°, 5; ed in un'altra più alta ancora, cioè di 232 piedi sopra il fondo, si ridusse ad 11°, 5. Il dotto capitano Wild, come dice Saussure, crede questo calore puramente locale e prodotto dallo zolfo e dalle piriti in quelle montagne abbondanti.

44. Ma nelle profondità accessibili delle mine metalliche, di carbon fossile, di sale o d'acque salse l'aria esterna circola sempre con qualche libertà o naturalmente o per arte; e quindi alle colonne aeree da misurarsi nell'altezza loro, possono, come all'aria ester-

na, applicarsi le ipotesi del calor variabile in progressione aritmetica o armonica. Si avverta però, che nei luoghi sotterranei la temperatura non cala sempre dal basso all'alto; ma che in estate è ordinariamente maggiore al loro ingresso che al fondo. Or, quando il calor cresce dal basso all'alto, il valor di c è $C + mx$ per la progressione aritmetica, e $\frac{C}{1 - mx}$ per l'armonica. Ciò posto, l'equazion differenziale per la progressione aritmetica è $\frac{dx}{C + mx} = -\frac{B dy}{y}$; la qual integrata coll'aggiungimento della costante vien ad essere $l(C + mx) = mBl\frac{A}{y} + lC$. Finalmente, passando dai logaritmi alle quantità semplici, sarà $C + mx = C\frac{A^{mB}}{y^{mB}}$; e per conseguenza $x = \frac{C}{m}\left(\frac{A^{mB} - y^{mB}}{y^{mB}}\right)$. Osservo ora, che in questo caso è $c = C + mx$; e quindi $C = c - mx$. Sostituisco adunque nella formola $c - mx$ a C; e mi viene $x = \left(\frac{c - mx}{m}\right)\left(\frac{A^{mB}}{y^{mB}} - 1\right)$; onde traggo $mx = c\left(\frac{A}{y}\right)^{mB} - c - mx\left(\frac{A}{y}\right)^{mB} + mx$, e fatte le convenienti riduzioni, $x = \frac{c}{m}\left(\frac{A^{mB} - y^{mB}}{A^{mB}}\right)$, cioè la formola stessa, che si trova

pel calore aritmeticamente diminuito dal basso all' alto col solo cangiamento di C in c.

E similmente per la progressione armonica avremo $\frac{\frac{dx}{C}}{1-mx} = -\frac{B\,dy}{y}$, ed integrando, $x - \frac{mx^2}{2} = -BC\,l\,y + Cost.$ La costante è $= BC\,l\,A$; onde nasce l' equazion completa $x - \frac{mx^2}{2} = BC\,l\,\frac{A}{y} = BC\,l\,10\,L\,\frac{A}{y}$ sostituendo i logaritmi tavolari a quei di Nepero.

A questa formola si potrà col metodo del num. 28 sostituirne un'altra più semplice; poichè, essendo nella presente ipotesi $c = \frac{C}{1-mx}$, sarà $mx = \frac{c-C}{c}$ ed $mx^2 = (\frac{c-C}{c})\,x$; il qual valore, sostituito nella formola precedente, la cangia in $(\frac{c+C}{2c})\,x = \ldots BC\,l\,10\,L\,\frac{A}{y}$ ed al fine in $x = \frac{2Cc}{C+c}\,B\,l\,10\,L\,\frac{A}{y}$, cioè in quella medesima, che abbiam trovato al num. 28.

45. Il sig. De Luc ha fatte varie osservazioni nelle miniere dell' Hartz, ad alcune delle quali applicherò le mie formole, cominciando dai casi ne' quali il calore fu decrescente dal basso all' alto. La prima osservazione sarà quella del fondo del pozzo della mina Dorotea; la cui profondità per le misure geometriche è

di tese 169, 53. In essa le altezze dei barometri ridotti alla stessa temperatura furono in sedicesimi di linea $A=$ 5260; $a=5053$, e per conseguente $L\frac{A}{a}=0.0174364$; $T=10,2985$, e $t=7,2922$. Qui il calor sotterraneo è maggior dell' esterno, e supposta la diminuzione in progressione aritmetica, dev'esser $c=C-10000\,m\,L\frac{A}{a}$. Sostituisco i valori di $C=1,0533$; $m=0,00005$, e $L\frac{A}{a}=0.0174364$; e trovo $c=1,0448$. Calcolo l' altezza colla formola del calor medio uniforme $x=9240,7\,(\frac{C+c}{2})\,L\frac{A}{a}$; sostituisco in questa i numeri precedenti; e mi viene

$$L\left(L\frac{A}{a}\right)=8\,.\,2414569$$

$$L\frac{C+c}{2}=|\,0\,.\,0210031$$

$$L\ coeff.=3\,.\,9657049$$

$$L\,x=2\,.\,2281649$$

$$x=169\,,\,1829$$

L' altezza calcolata è dunque minore della geometrica; ma la differenza non giugne a 35 centesimi di tesa o poco più di due piedi.

Al fondo del pozzo della miniera detta Carolina,

profondo di tese 171,12 fu $A=5261$; $a=5053$; $L\frac{A}{a}=$ 0.017519; $T=12°,019$; $C=1,0626$; e $c=C-\frac{1}{2}$ $L\frac{A}{a}=1,0626-0,0087595=1,05384$. Calcolando come sopra con questi dati si trova $Lx=2.2337820$, ed $x=171,31$, altezza che supera la geometrica di 19 centesimi di tesa o poco più di un piede.

Se calcoleremo le stesse osservazioni colla formola primitiva $x=20000\,C\left(\frac{A^{0,20066}-a^{0,20066}}{A^{0,20066}}\right)$ troveremo per la prima $x=169,03$ minor di tre piedi dell' altezza geometrica; e per la seconda $x=170,8192$ altezza minore della geometrica di 3 decimi di tesa o alquanto men di due piedi.

Nella galleria Giorgio fu $A=5265$; $a=5112$; $T=9°,44$; e $t=14°,06$. Quì il calore è crescente dal basso all' alto; onde posso far il calcolo colla formola $x=20000\;c\left(\frac{A^{0,20066}-a^{0,20066}}{A^{0,20066}}\right)$.

I dati sono $c=1,0738$; $A^{0,20066}=5,581305$; $a^{0,20066}=5,548376$; e da questi risulta $Lx=2.1027961$; $x=126,7057$. L' altezza geometrica dà 125,8076 minore della calcolata di tese 0,8981, o alquanto più di piedi $5\frac{1}{3}$.

Finalmente nella galleria undecima delle stesse mine fu $A=5372$; $a=5112$; $T=13°\frac{1}{3}$; e $t=13°\frac{5}{6}$. Quì la temperatura inferiore è minore d' un mezzo gra-

do della superiore; onde segue, che il calcolo si può fare come nel caso precedente. Il risultato è $L\,x = 2\,.\,3281982$; $x = 212\,,91$, altezza che supera di piedi $5\,\frac{1}{3}$ la misura geometrica, la quale è di tese $212\,,02$.

Nell' ipotesi del calor variabile in progressione armonica il valor di c è $\frac{C}{1+m\,x}$ per le due prime osservazioni, e $\frac{C}{1-m\,x}$ per le altre due. Nella prima osservazione è dunque $c = \frac{1\,,0533}{(1+0\,,00004666)\,174\,,364} = \frac{1\,,0533}{1\,,0081358} = 1\,,0448$. Ciò posto, se faremo il calcolo colla formola $x = 9240,7\,(\frac{2\,C\,c}{C+c})\,L\frac{A}{a}$, avremo

$$L\frac{2\,C\,c}{C+c} = 0\,.\,0207890$$

$$L\,(L\frac{A}{a}) = 8\,.\,2414569$$

$$L\,coeff. = 3\,.\,9657049$$

$$L\,x = 2\,.\,2279508$$

$$x = 169\,,0249\,.$$

Quì l' altezza calcolata è minor della geometrica di tre piedi e alquanto più d' un terzo di pollice.

Calcolando nello stesso modo la seconda osservazione, si trova $L\,x = 2\,.\,2334658$, ed $x = 171\,,18$ al-

tezza che supera la geometrica non più che di sei centesimi di tesa, o sia poco più di quattro pollici.

Nella terza osservazione, dovendo esser $c = \frac{C}{1 - m x}$,

sarà $C = c - c\,m\,x = 1\,,0738 - (0\,,0000_4666)\,(1\,,0738)$

$(128\,,076) = 1\,,0674$. Ciò posto, è $L\frac{2\,C\,c}{C+c} = 0\,.\,0296234$

e, fatto il calcolo colla medesima formola, si trova $Lx = 2\,.\,1027950$, ed $x = 126\,,7054$, risultato quasi eguale a quello della progressione aritmetica.

Fatto in fine lo stesso calcolo per l'osservazion quarta si giugne ad $x = 212\,,446$, altezza che supera la geometrica di due piedi e 15 centesimi.

SEZIONE VIII

Formole per la misura barometrica delle altezze nel sistema della gravità decrescente in ragion duplicata delle distanze dal centro della terra, e crescente col crescer delle latitudini.

46. Tutte le formole che abbiam trovate fin quì, si riferiscono alla gravità costante. Vediam ora quali cangiamenti debba in quelle introdurre la supposizione al vero più conforme della gravità in ragione inversa duplicata delle distanze dal centro della terra.

Sia

g la gravità al livello del mare, colla quale nella misura delle altezze si confonderà quasi sempre la gravità dei corpi situati alla stazione inferiore;

1 la densità del mercurio alla temperatura del ghiaccio, che si scioglie, o sia di $C = 1$;

$\frac{1}{D}$ la densità d' uno strato d' aria non molto superiore al livello del mare, che abbia anch' esso la temperatura del ghiaccio, e sia compresso dal peso $g A'$ d' una colonna di mercurio della stessa temperatura, la cui altezza sia A';

x la distanza dei due strati d' aria, ne' quali si fanno le osservazioni;

X una funzione d' x corrispondente al calore dell' altezza x;

$\frac{1}{\delta}$ la densità dell' aria alla stazion superiore;

r il raggio della terra.

Per avere la gravità g' corrispondente alla distanza x, si osservi che la distanza della stazion inferiore dal centro della terra si confonde quasi sempre fisicamente col raggio della medesima; e quindi si faccia la proporzione $g : g' = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{(r+x)^2}$; e si avrà $g' = \frac{g r^2}{(r+x)^2} = g\left(1 - \frac{2x}{r} + \frac{3x^2}{r^2} - \frac{4x^3}{r^3} + \frac{5x^4}{r^4} - \text{ec.}\right)$. Per l' estrema grandezza di r in confronto d' x tutti i termini divisi per r^2, r^3, ec. si posson negligentare *(a)*;

(a) Il raggio r per le più recenti ed esatte misure dei gradi di latitudine può calcolarsi di tese 3266330, e quindi, supposta $x = 3500$ tese, altezza straordinaria, cui diconsi esser arrivati Gai Lussac, e Biot nella celebre loro ascensione areostatica, il termine $+ \frac{3x^2}{r^2}$ non giungerebbe a tre millesimi e mezzo di tesa

e ciò fatto, resterà $g' = g(1 - \frac{2x}{r})$. Chiamata y l'altezza del barometro alla stazion superiore (avvertendo però che quest'altezza e quella della stazion inferiore sian ridotte alla medesima temperatura) la pressione della colonna y sarà $g(1 - \frac{2x}{r})y$. Ora ciò posto, essendo le densità dell'aria in ragion diretta dei pesi comprimenti ed inversa dei calori, sarà

$\frac{1}{D} : \frac{1}{\delta} = \frac{g A'}{C} : \frac{g(1 - \frac{2x}{r})y}{X}$; e per conseguente $\frac{1}{\delta} = \frac{(1 - \frac{2x}{r})y}{D A' X}$; avvertendo, che C calore della temperatura del ghiaccio è $= 1$. La pressione dello strato d'aria, che ha dx per altezza, sarà dunque $\frac{g' dx}{\delta} = \frac{g'(1 - \frac{2x}{r})y\,dx}{D A' X}$, e quella dello strato di mercurio, che ha dy per altezza, $= g' dy$. Or da queste pressioni, che si equilibrano, risulta l'equazion seguente, nella quale per maggior semplicità ho sostituito B a $D A'$,

$\frac{(1 - \frac{2x}{r})y\,dx}{B X} = -dy$; ove dy ha il segno negativo perchè al crescer delle x diminuiscon le y. Avrem dunque per equazion finale

$$\frac{(1-\frac{2x}{r})\,dx}{X} = -\frac{B\,dy}{y},$$

la qual si riduce a quella della gravità costante, supponendo r infinitamente maggiore di $2x$.

47. Cominciamo a supporre, che X funzion del calore sia una quantità costante, ed uguale al calor medio fra quelli delle due estremità della colonna aerea, cioè a $\frac{C+c}{2}$. In questo caso l'equazion precedente sarà $\frac{2}{C+c}(1-\frac{2x}{r})\,dx = -\frac{B\,dy}{y}$. Ne fo l'integrazione, e mi risulta

$$\frac{2}{C+c}(x-\frac{x^2}{r}) = -B\,l\,y + Cost.$$

Determino la costante colla condizione, che, quando x è $= 0$, sia $g'\,y = g\,A$, esprimendo per A l'altezza del barometro osservata alla stazion inferiore colla debita correzion del calore. Essendo $g = g'\frac{(r+x)^2}{r^2} = g'(1+\frac{x}{r})^2$, sarà $g\,A = g'\,(1+\frac{x}{r})^2\,A = g'\,y$, ed $y = (1+\frac{x}{r})^2\,A$. La costante fia dunque $B\,l\,A + 2\,B\,l\,(1+\frac{x}{r})$. Osservo, che anche per le più alte stazioni, cui l'uomo possa giungere, è $\frac{x}{r}$ una frazion piccolissima; e ne conchiudo,

che il logaritmo neperiano di $(1+\frac{x}{r})$ è prossimamente uguale ad $\frac{x}{r}$. Sarà dunque $2\,B\,l\,(1+\frac{x}{r})=\frac{2\,B\,x}{r}$; e questo valore sostituito nella costante darà all'equazione la forma

$$\frac{2}{C+c}\,(x-\frac{x^2}{r})=B\,l\,\frac{A}{y}+\frac{2\,B\,x}{r}\,,$$

la qual equazione, sostituiti i logaritmi delle tavole a quei di Nepero, si cangerà in

$$(\mathrm{E})\;x-\frac{x^2}{r}=(\frac{C+c}{2})\,B\,l\,10\,L\,\frac{A}{y}+\frac{B(C+c)\,x}{r}$$

e dopo le convenienti riduzioni, in

$$x^2+(B(C+c)-r)\,x=-B\,r\,l\,10\,(\frac{C+c}{2})\,L\,\frac{A}{y}\,;$$

ove B pel num. 26 è $=4013,2$; ed $r=3266330$ pel num. precedente. Applichiam questa formola alla solita osservazione del monte Saleve; nella quale pel num. 38 fu $C=1,0544$; $c=1,0289$; $C+c=2,0833$; e $B\,l\,10\,(\frac{C+c}{2})\,L\,\frac{A}{y}=490,744$. Sostituisco questi valori nell'equazion superiore, e ne ho

$$x^2-(3257969,3)\,x=-1602951447,5$$

Per risolver più facilmente quest'equazione, le do la forma seguente

$$(3257969,3-x)\,x=1602951447,5.$$

Ciò fatto, ne prendo i logaritmi, ed ho

$L(3257969,3 - x) + L\,x = L\,1602951447,5 = 9.20492039.$

E qui si avverta, che alla gravità decrescente dee corrisponder un'altezza che superi quella della gravità costante. Cominciam dunque a supporre $x = 492$; e troveremo il primo membro dell'equazion logaritmica $= 9.2048465$ minore del logaritmo del secondo membro. Ma la supposizione d' $x = 492,1$ dà per logaritmo del primo membro 9.204934867 maggior di quello del secondo membro; e per lo contrario la supposizione di $492,08$ lo dà alquanto minore. Il vero valor dell'incognita è dunque compreso fra i limiti $492,08$, e $492,10$; vale a dire ch'egli è assai vicino a $492,09$.

Ad un risultato pressochè uguale si giunge in quest'altra maniera più spedita. Scrivo l'equazione E nel modo seguente

$x = B\,l\,10\,(\frac{C+c}{2})\,L\,\frac{A}{y} + \frac{B(C+c)\,x + x^2}{r}$. Ciò fatto, si vede tosto, che $B\,l\,10\,(\frac{C+c}{2})\,L\,\frac{A}{y}$ è il valor d' x nell'ipotesi della gravità costante, e che questo valore sostituito ad x negli altri due termini, esprimerà assai bene l'aumento dell'altezza prodotto dalla gravità decrescente in ragion duplicata delle distanze dal centro della terra. Quest'aumento nel nostro esempio è espresso da $\frac{((4013,2)\,(2,0833) + 490,744)\,490,744}{3266330}$.

Ora $(4013,2)\,(2,0833)$ è $= 8360,7$; e $8360,7 +$

490 , 744 = 8851 , 444; il qual numero ha per logaritmo 3 . 9470120. A questo logaritmo aggiungo quello di 490 , 744; e trovo, che il logaritmo del numeratore della frazion precedente è = 6 . 6378671. Da questo sottraggo il logaritmo di 3266330 = 6 . 5140601; e mi resta 0 . 1238070; cui corrisponde il numero 1 , 32986, che esprime il cercato accrescimento dell' altezza; per cui questa vien ad essere 492 , 07386 in luogo di 492 , 09 valore trovato quì sopra. La differenza è di tese 0 , 01614; e non giunge per conseguenza ad un pollice e un quarto su 492 tese.

Nell' osservazion del Monbianco fu, pel num. 38,

$$B\ l\ 10\left(\frac{C+c}{2}\right) L\frac{A}{y} = 2246,529;\ C = 1,1198;\ c = 1,$$

0054; e $C + c = 2,1252$. Calcolando con questi dati per trovare l'aumento dell' altezza avremo (4013 , 2) (2 , 1252) = 8528 , 8529; (4013 , 2) (2 , 1252) + 2246, 529 = 10776 , 3819. Il logaritmo di questo numero è 4 . 032473; al quale aggiungendo il logaritmo di 2246, 529, ne risulta 7 . 3839849 logaritmo del numeratore nella frazione $\frac{(B(C+c)+x)x}{r}$. E finalmente, sottratto da questo il logaritmo di r, ne rimane 0 . 8699248; cui corrisponde il numero 7 , 4118 aumento dell' altezza prodotto dalla gravità decrescente. L' altezza totale è dunque 2246 , 529 + 7 , 4118 = 2253 , 9408.

48. Calcoliam ora la formola nell' ipotesi rigorosa del calor decrescente in progressione aritmetica su tutta la lunghezza della colonna aerea da misurarsi; nel-

la qual ipotesi è $X = C - m\,x$. In questo caso l'equazion precedente è $\frac{(1 - \frac{2x}{r})\,dx}{C - m\,x} = -\frac{B\,dy}{y}$; la quale agevolmente riducesi a quest'altra forma

$$\frac{dx}{C - m\,x} + \frac{2\,dx}{m\,r} - \frac{2\,C\,dx}{m\,r\,(C - m\,x)} = -\frac{B\,dy}{y}.$$

L'integrale di quest'equazione è

$$-\frac{1}{m}l(C - mx) + \frac{2\,C}{m^2 r}l(C - mx) + \frac{2\,x}{m\,r} = -B\,ly + Cost.$$

La costante determinata, come nel num. prec. colla condizione, che quando x è $= 0$, sia $g'\,y = g\,A$, vien ad essere $-(\frac{1}{m} - \frac{2\,C'}{m^2 r})\,l\,C + B\,l\,A + \frac{2\,B\,x}{r}$; onde risulta l'equazione

$$-(\frac{1}{m} - \frac{2\,C}{m^2 r})\,l(C - m\,x) + \frac{2\,x}{m\,r} = B\,l\frac{A}{y} - (\frac{1}{m} - \frac{2\,C}{m^2 r})\,l\,C + \frac{2\,B\,x}{r};$$

alla quale, colle convenienti riduzioni dei termini, si dà in fine la forma seguente

$$x - \frac{l\,10}{1 - m\,B}\left(\frac{m\,r\,B}{2}L\frac{A}{y} + (\frac{r}{2} - \frac{C}{m})\,(L(C - m\,x) - LC)\right) = 0$$

Sostituisco in questa formola i valori di B, m, $l\,10$; e la cangio in

$$x - 2{,}88061\left(327710{,}68\,L\frac{A}{y} + (1633165 - 20000\,C)(L(C - \frac{x}{20000}) - LC)\right) = 0$$

Or quest' equazione non è solubile nè assolutamente nè per approssimazione con alcun metodo diretto. Ma nei casi particolari si potrà nel seguente modo ottenere il prossimo valor dell' incognita.

Nella solita osservazione del monte Saleve fu $L\frac{A}{y} = 0.0510293$ e $C = 1,0544$; e da questi dati risulta $327710,68\, L\frac{A}{y} = 16708,59$; e $1633165 - 20000\, C = 1612077$. L' equazione si riduce per conseguenza ad

$$x - 2,88061\left(16708,59 + 1612077\,(L(1,0544 - \frac{x}{20000}) - L\,1,0544)\right) = 0$$

Al num. 38 s'è visto, che l'altezza calcolata per l'ipotesi della gravità costante è di tese 491,3616. Ora, dovendo l' altezza esser maggiore per la gravità decrescente, io comincio a supporla = 492, e posto questo valore in luogo d' x, ne ho per risultato $-28,7$. Ma per la supposizione d' $x = 493$, il risultato è $+70,22$. L' altezza cercata sta dunque fra i limiti 492, 493; ma dev' esser più vicina al primo che al secondo. E tale appunto è l' altezza, che abbiam trovata nel num. prec. colla formola del calor uniforme e medio aritmetico tra quelli delle due estremità della colonna aerea.

Fatta la stessa serie di calcoli per l' osservazion del Monbianco, si troverà che l'incognita è contenuta fra i limiti 2253, 2254, quale l'abbiam trovata nel risultato della formola del calor medio uniforme.

Questa formola dunque, la quale è d' un calcolo assai più facile, può senz' alcun sensibile errore sostituirsi a quella del calor variabile in tutta l'altezza an-

che nel sistema della gravità decrescente in ragion duplicata delle distanze dal centro della terra.

49. Supposto finalmente, che il calor diminuisca in progressione armonica, è $X = \frac{C}{1 + m x}$; e quindi per la gravità in ragion inversa duplicata delle distanze nasce l' equazion differenziale $(1 - \frac{2x}{r})(1 + m x)\, d x = -\frac{B C d y}{y}$. Fatta la moltiplicazion dei fattori ed integrata l' equazion differenziale, ne risulta $x - \frac{x^2}{r} + \frac{m x^2}{2} - \frac{2 m x^3}{3 r} = -B C l y + Cost.$ La costante determinata come nei num. prec. è $B C l A + \frac{2 B C x}{r}$. Aggiunta la costante e sostituiti i logaritmi delle tavole a quei di Nepero ne vien l' equazione $x - \frac{x^2}{r} + \frac{m x^2}{2} - \frac{2 m x^3}{3 r} = B C l 10 L \frac{A}{y} + \frac{2 B C x}{r}$; ovvero $\frac{2 m x^3}{3 r} + \frac{x^2}{r} - \frac{m x^2}{2} + \frac{2 B C x}{r} - x + B C l 10 L \frac{A}{y} = 0$; la qual si riduce ad

$$x^3 - 3\frac{(m r - 2) x^2}{4 m} + 3\left(\frac{2 B C - r}{2 m}\right) x + 3 \frac{B C r l 10}{2 m} L \frac{A}{y} = 0$$

I valori di B e di r son sempre i medesimi: e quel-

lo di m pel num. 24 è 0, 00004666. Ma i valori di C, A, ed y nei soli casi particolari son determinati. In quello dell' osservazion solita del monte Saleve è $C =$ 1, 0544, e $L\frac{A}{y} = 0,0510293$. Sostituendo adunque questi numeri nell' equazion precedente, essa riducesi ad

$$x^3 - 2418406\,x^2 - 104766672648\,x + 5222550406257 9 = 0.$$

Or nell' ipotesi della gravità costante abbiam visto al num. 27, esser $x = 491, 57$ tese; onde segue, che per la gravità decrescente il valor suo sarà alquanto maggiore. In fatti, sostituendo successivamente in luogo d'x i numeri 492, 493, i risultati cangian di segno, e col cangiamento ci avvisano, esser l' incognita contenuta fra questi due limiti. Volendoli poi ristringere, ed avere in frazioni decimali il valor prossimo dell' incognita, il gran numero delle cifre, di cui son composti i coefficienti, renderebbe il calcolo assai laborioso. Per evitare un così fatto inconveniente gioverà il dare all' equazione quest' altra forma

$$x + \frac{m x^2}{2} = BCl\,10\,L\frac{A}{y} + \frac{2 m x^3}{3 r} + \frac{x^2}{r} + \frac{2 BCx}{r}.$$

Imperciocchè nella stessa ipotesi del calore, ma supposta la gravità costante, l'equazione pel num. 27 è $x + \frac{m x^2}{2} = BCl\,10\,L\frac{A}{y}$; onde segue, che i tre termini $\frac{2 m x^3}{3 r} + \frac{x^2 + 2 BCx}{r}$ corrispondono all' accrescimento d' altezza, che nasce dalla diminuzione della gravità.

Per render alquanto più semplice il calcolo di quest' accrescimento, osservo che mx è $= \frac{C-c}{c}$; e per conseguente $\frac{2mx^3}{3} = \frac{2(C-c)x^2}{3c}$, e $\frac{2mx^3}{3} + x^2 = \ldots$ $\frac{2(C-c)x^2 + 3cx^2}{3c} = (\frac{2C+c}{3c})\, x^2$. L' aumento intero è dunque $\frac{(\frac{2C+c}{3c})\, x^2 + 2BCx}{r}$; ovvero

$$\frac{\left((\frac{2C+c}{3c})\, x + 2BC\right) x}{r}.$$

Applicando questa formola al solito esempio del monte Saleve, abbiamo pel num. 27, $x = 491,57$ nel caso della gravità costante; $C = 1,0544$, e $c = 1,0299$ pel num. 36 alla fine. Or da questi dati risulta

$$\frac{2C+c}{3c} = 1,0158, \text{ e } (\frac{2C+c}{3c})\, x + 2BC = 8962,373.$$

Ciò posto, il numeratore della frazion precedente ha per logaritmo 6 . 64400845 ; ed il logaritmo del denominatore è 6 . 5140601. Quel della frazione è dunque 0 . 12994835; al qual corrisponde il numero 1 , 3438 : cosicchè l'accrescimento per la progressione armonica supera di 14 millesimi di tesa o di un pollice quello, che sopra abbiam trovato per la progressione aritmetica.

E con un simile calcolo applicato all' osservazion del Monbianco troveremo, che l'aumento d'altezza pro-

dotto dalla diminuzione della gravità è di tese 7, 843 su 2249 corrispondenti alla gravità costante.

Da questi esempj si raccoglie facilmente, che l'aumento delle altezze prodotto dalla diminuzione della gravità anche pel calor decrescente in progressione armonica non è così piccolo come lo ha creduto il sig. Hennert; il quale nell'integrar la sua formola non ha avuto riguardo alcuno all'accrescimento di gravità prodotto nel mercurio del barometro superiore dalla supposizione d'$x = 0$, con cui nell'integrazione si determina la costante. Vedi il num. 24 della sua dissertazione da me già citata al num. 17.

50. Dopo la celebre osservazion del Richer sul ritardamento dei pendoli in vicinanza dell'equatore è stato generalmente verificato dai Fisici, esser la gravità variabile anche alla superficie della terra, e col crescer delle latitudini andar essa pure crescendo gradatamente. Or quindi avviene, che le densità dell'aria corrispondenti ad un'altezza uguale A' del barometro, e proporzionali ai pesi della colonna mercuriale non posson esser uguali a latitudini diverse; ma debbon farsi o maggiori o minori secondo che la gravità è per la variata latitudine o accresciuta o diminuita. Chiamata $\frac{1}{D}$ la densità dell'aria corrispondente al peso $g'A'$ nella latitudine, in cui la gravità è g', la densità, che chiamerò $\frac{1}{d}$ per un'altra latitudine, in cui la gravità sia g, sarà determinata dalla proporzione $g'A' : gA' = \frac{1}{D} : \frac{1}{d}$; e per

conseguenza avremo $\frac{1}{d} = \frac{g}{g' D}$, e $d = \frac{g' D}{g}$.

Osservo ora, che nel determinare il coefficiente $D A'$ con osservazioni fatte, toltone una sola, a gradi 46 e pochi minuti di latitudine ho supposto $g' = 1$; e ne conchiudo, che il coefficiente $A' d$ per ogni altra latitudine sarà $\frac{A' D}{g}$. Per trasportar le formole barometriche dalla latitudine 46° a qualunque altra, si cercherà dunque primieramente qual sia il valor di g per la latitudine, cui vuol farsi il trasporto; poi con questo valore si dividerà $D A'$ coefficiente delle formole calcolate pel grado 46.

51. Il sig. Laplace ha dimostrato al num. 42; lib. III della Meccanica celeste, che se la gravità all' equatore è G, ed a qualunque altra latitudine g, sarà $g = \left(1 + \frac{0,004208\, sin.^2 lat.}{0,789502}\right) G$. Io poi ho determinato il coefficiente $D A' l$ 10 per mezzo di tre osservazioni fatte da me sul Lago di Como, di una del sig. De Luc (tutte alla latitudine 46° e pochi minuti) e d' un' altra del General Roy fatta alla latitudine 51° 30'. Or chiamata g' la gravità al grado 46 sarà

$$g' = \frac{(1 + (0,004208)(5174497))}{0,789502} G = (1 + 0,0027577638) G$$

Sarà dunque

$$g' : g = 1 + 0,0027577638 : 1 + 0,00532994\, sin.^2 lat.$$

Si osservi, che nel calcolare il coefficiente io ho sup-

posto $g' = 1$; onde segue, che per questa supposizione è $g = \frac{1 + 0,00532994\, sin.^2 lat.}{1 + 0,0027577638}$; ovvero $g = \frac{1 + (0,00266497)(1 - cos.\, 2\, lat.)}{1 + 0,0027577638}$ essendo noto per le formole trigonometriche, che $sin.^2 a$ è $= \frac{1 - cos.\, 2a}{2}$

Dunque ne avrem finalmente (F) $\frac{1}{g} = \frac{1 + 0,0027577638}{1 + 0,00266497 - 0,00266497\, cos.\, 2\, lat.}$. Pongo ora $0,0027577638 = A$, e $0,00266497 = B$; ed ho $\frac{1}{g} = \frac{1 + A}{1 + B - B\, cos.\, 2\, lat.} = \frac{1 + A}{1 + B}\left(1 + \frac{B\, cos.\, 2\, lat.}{1 + B} + \frac{B^2 cos.^2 2\, lat.}{(1 + B)^2} + \frac{B^3 cos.^3 2\, lat.}{(1 + B)^3} + \text{ec.}\right)$; nella qual formola basterà calcolare i due primi termini della serie, attesa l'estrema piccolezza degli altri. Ciò posto, sarà (F') $\frac{1}{g} = \frac{1 + A}{1 + B}\left(1 + \frac{B\, cos.\, 2\, lat.}{1 + B}\right)$. Rimetto i numeri corrispondenti ad A, B; e trovo $\frac{1 + A}{1 + B} = 1,000092$; e $\frac{B}{1 + B} = 0,002659$. Sarà dunque

$\frac{1}{g} = 1,000092\,(1 + 0,002659\, cos.\, 2\, lat.)$

Calcolando il coefficiente coll'osservazione del General Roy ho supposta costante la gravità a qualunque latitudine; ma per la formola precedente a gradi 51° 30′ è $\frac{1}{g} = \ldots\ldots 1,000092\,(1 + 0.002659)\,cos.\,103 = 0,999494$. Per trasportar il coefficiente 9225,4 da 51° 30′ a 46° avrem dunque l'analogia $0,999494 : 1 = 9225,4$ al quarto, che sarà 9230,104954. Or questo coefficiente combinato cogli altri quattro dà per la latitudine 46° il coefficiente medio 9241,6; del quale si dovrà far uso, volendo, come ragion richiede, aver riguardo alla gravità variabile per le diverse latitudini. La differenza dei due coefficienti è per verità così piccola, che l'accrescimento delle altezze prodotto dal maggiore non giugne ad un diecimillesimo delle altezze date dal minore. Ma poichè un coefficiente non conduce a calcoli più complicati che l'altro, quello è ragionevolmente da preferirsi, ch'è più conforme alle vere leggi della gravità. Ciò posto, il valor di B, il quale pel primo coefficiente era $= \frac{9240,7}{l\,10} = 4013,2$ si cangerà in $\frac{9241,6}{l\,10} = 4013,59$; e questo è il valore, di cui si farà uso applicando le formole delle misure delle altezze ai varj casi particolari.

52. Se il coefficiente si fosse determinato con osservazioni fatte alla latitudine 45°, il valore di $\frac{1}{g}$ sarebbe espresso da una formola più semplice della precedente (F). Imperocchè *sin.*² *lat.* è in questo caso $= \frac{1}{2}$; e per conseguente g' è $= (1 + 0,00266497)\,G$; dal qual va-

lore con un calcolo simile a quello, che poco sopra abbiam fatto per la latitudine 46°, si deduce

$$\frac{1}{g} = \frac{1 + 0,00266497}{1 + 0,00266497 - 0,00266497 \cos. 2 lat.}$$

Quì dùnque le quantità, che poc' anzi abbiam chiamate A, e B son eguali tra loro, e la formola (F') del grado 46 si cangia in quella della latitudine 45° ponendo B in luogo di A; per la qual sostituzione essa diviene

$$\frac{1}{g} = 1 + \frac{B \cos. 2 lat.}{1 + B} = 1 + 0,002659 \cos. 2 lat.$$

Secondo il sig. Laplace $\frac{1}{g}$ dovrebb'essere $= 1 + 0,002845 \cos. 2 lat.$; ma la differenza tra il suo ed il mio risultato non giunge a due diecimillesimi; ed i lettori esaminando il mio calcolo, ne potranno scoprir gli errori se pur ve n'ha. Certo la differenza non può attribuirsi ai termini della serie, ch' io ho negligentati; poichè la lor somma non può mai arrivare ad un centomillesimo. (Vedi la Meccanica celeste; vol. IV; pag. 289 e seguenti)

Volendo far uso di quest'ultima formola, converrà ridurre il coefficiente 9241, 6 del grado 46 a quello del grado 45 dividendolo per $1 + 0,002659 \cos. 92°$, cioè per 0, 999907. Si faccia la divisione, e si troverà il quoto 9242, 47 coefficiente del grado 45; e questo moltiplicato per $1 + 0,002659 \cos. 2 lat.$ darà il coefficiente generale per tutte le latitudini.

Per gradi 46 abbiam visto pur ora, esser $B = 4013, 59\frac{1}{2}$; ma per gradi 45 sarà $B = \frac{9242, 47}{l\ 10} = 4013, 96$.

Questo è dunque il numero, che in tutte le formole dei paragrafi precedenti dovrà sostituirsi a B nelle varie ipotesi del calore e della gravità per la latitudine di gradi 45. Vedrem poi nella parte III, che il coefficiente 9242,47 (1 + 0,002659 *cos.* 2 *lat.*) dà le altezze maggiori delle vere per le osservazioni di De Luc, ma minori per quelle di Shuckburg, Roy, e Ramond; e generalmente, che nessun valor costante di B (cioè di DA') potrà soddisfare ugualmente alle osservazioni del primo ed a quelle degli altri tre fisici pur or menzionati.

53. Per l'ipotesi del calor medio uniforme del numero 47 la mia formola è

$$x - \frac{x^2}{r} = B\,l\,10\,(\frac{C+c}{2})\,L\frac{A}{y} + \frac{B(C+c)\,x}{r}\,.$$

Ora, se $B\,l\,10$ è il coefficiente pel grado 45 di latitudine, la formola stessa applicata a qualunque altro grado diverrà

$$x - \frac{x^2}{r} = B\,l\,10\,(1 + 0,002659\ cos.\,2\ lat.)\frac{C+c}{2}\,L\frac{A}{y} +$$

$$B\,(1 + 0,002659\ cos.\,2\ lat.)\,(\frac{C+c}{r})\,x\,,\ \text{ovvero}$$

$$x - \frac{x^2}{r} = B\,l\,10(1+0,002659\ cos.\,2\ lat.)(\frac{C+c}{2})\,(L\frac{A}{y} + \frac{2\,x}{r\,l\,10})\,;$$

ove l'ultimo termine $+\frac{2\,x}{r\,l\,10}$ è lo stesso che $\frac{x}{r}$. 0,868589.

Sostituiscasi 18336^{metri} a $B\,l\,10$; r ad x; a ad r; $1 + 0,00375\,t$, ed $1 + 0,00375\,t'$ a C, e c; 0,002845 a 0,002659; (h), h ad A, y; che tali sono le quantità del sig.

La Place corrispondenti alle mie, e la formola precedente si cangerà in quella, cui egli è giunto con un metodo ben diverso dal mio, cioè in

$$r\left(1-\frac{r}{a}\right)=18336^{\text{met.}}(1+0{,}002845\,cos.\,2\,lat.)\left(1+\frac{t+t'}{2}.0{,}00375\right)$$

$$\left(L\frac{(h)}{h}+\frac{r}{a}.0{,}868589\right)$$

la qual formola, divisi i due membri per $1-\frac{r}{a}$, ed avvertendo, che $\frac{1}{1-\frac{r}{a}}$ è prossimamente $=1+\frac{r}{a}$, si riduce finalmente ad

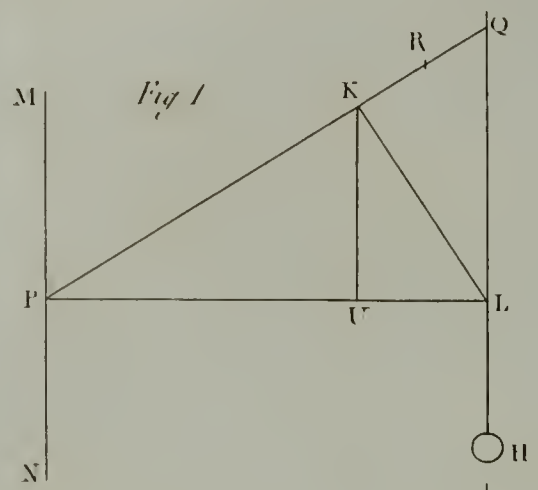
$$r=18336^{\text{met.}}(1+0{,}002845\,cos.\,2\,lat.)\left(1+\frac{t+t'}{2}.0{,}00375\right)$$

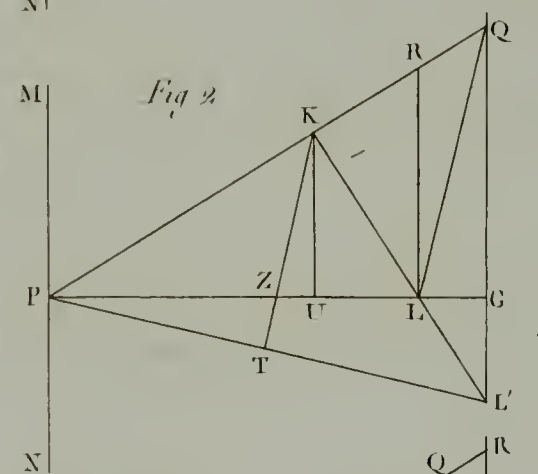
$$\left(\left(1+\frac{r}{a}\right)\left(L\frac{(h)}{h}+\frac{r}{a}.0{,}868589\right)\right)$$

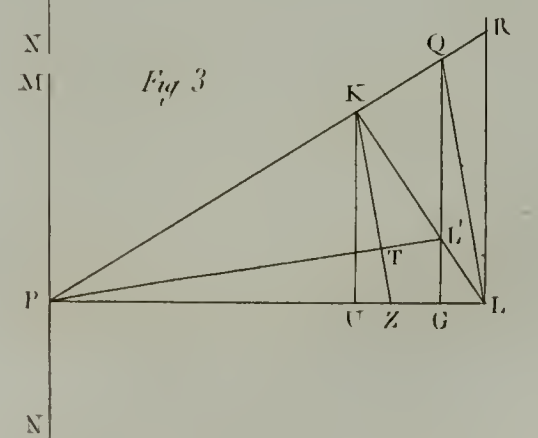
quale appunto si trova alla pag. 292. lin. 17. vol. IV della Meccanica celeste.

La terza ed ultima parte sarà data in altro volume.

Pag 1-1







NUOVA SOLUZIONE

di un problema di meccanica dell' Eulero

Di Girolamo Saladini

presentata a' 10 d'agosto 1807

Una delle memorie del chiarissimo geometra Gregorio Fontana, che si contiene nel tomo nono della Società italiana delle scienze ha in argomento la risoluzione di un problema meccanico proposto altra volta al grand' Eulero e da lui sciolto elegantemente adoperando l'armonia fra i principj generali di quiete e di moto del sig. Maupertuis. Questo matematico incomparabile forse compiacendosi della felicità di una tale risoluzione soggiunse: *il problema non è sì facile a sciogliersi co' principj ordinarj della meccanica*. Ma la cosa in realtà andare altrimenti il professore Fontana patentemente dimostra, poichè coi soli notissimi principj di meccanica giunge con speditezza allo scioglimento del problema, non solamente nel caso semplicissimo dell' Eulero, ma in altri più complicati, assicurando così ai principj noti e fondamentali della meccanica lo splendore di cui sono in possesso, e che poteva alquanto offuscarsi da una grande autorità. Perchè poi

resti confermato quanto esponesi dal soprallodato professore, mi è passato per l'animo di metter a cimento un principio meccanico noto, a me famigliare, per cui ritenendo le forze nella loro naturale quantità e direzione, si suole con retto cammino e con prestezza giungere alla meta propostasi, e quindi di esporre il mio qualunque siasi sentimento sulle riflessioni di cui correda il professore Fontana la sua dotta memoria.

PROBLEMA

La retta MN (Fig. I) rappresenta un muro verticale perfettamente liscio; K un punto fisso; PQ una verga rigida spogliata di gravità, accostata coll'estremità P al muro MN, e appoggiata soltanto al punto fisso K potendo concepire intorno lo stesso punto moto rotatorio e radente; all'altra estremità Q della verga è attaccato il peso H: si cerca di situar la verga PQ in maniera che dalle due reazioni del muro MN e dell'ostacolo fisso K sia impedito qualunque moto della medesima, che tenta indurvi il peso H, cioè che non solamente sia impedito il moto rotatorio circa il punto K, ma il rettilineo altresì radente l'ostacolo K, non essendo per supposizione connettimento alcuno tra l'ostacolo e la verga.

Egli è cosa certa, che la reazione del muro MN nel punto P, qualunque siasi, dirigere si debbe a seconda della retta PL normale al muro nello stesso punto P, come la reazione dell'ostacolo K esser debbe per KL normale alla verga PQ; per lo che in vigore del soprammentovato principio meccanico è mani-

festo che non potrassi ottenere equilibrio, quando le tre direzioni QL del peso, PL della reazione del muro, e KL della reazione dell' ostacolo non s' incontrino in uno stesso punto L, onde nasca il triangolo rettangolo PLQ, in cui la retta LK, che congiunge il vertice del triangolo L col punto K dell'ostacolo riesca normale alla verga PQ ipotenusa del triangolo. Quindi calata dall' ostacolo K la KU normale al cateto PL, che determina PU distanza dell' ostacolo dal muro, saranno le quattro rette PU, PK, PL, PQ in proporzione continua, e perciò sarà PQ a PU in ragion triplicata di PQ a PL. Chiamata adunque PQ quantità nota $= a$, PU quantità similmente nota $= b$, $PL = z$; avremo $a : b = a^3 : z^3$, e $z = \sqrt[3]{a^2 b}$; e se si chiami la PK altra delle due medie proporzionali $= x$, sarà $x = \sqrt[3]{a b^2}$, lo che combina colla risoluzione euleriana e del professore Fontana, ricavata con giro di calcolo da altri principj.

Questa risoluzione non vien meno se suppongasi la verga PQ grave, anzi gravata da qualunque numero di pesi; imperciocchè trovato il centro di gravità di tutto il peso, per esempio R, la PR sarà l' ipotenusa del triangolo rettangolo dotato della sopra indicata proprietà delle quattro continue proporzionali pel caso dell' equilibrio; potransi adunque determinare le due medie z, x nella stessa maniera; cioè sarà $z = \sqrt[3]{a'^2 b}$, $x = \sqrt[3]{a' b^2}$ posta $a' = PR$, cioè sostituita la

PR a PQ; lo che non è difficile ricavare ancora dalle formole del professore Fontana. Se pongasi $a' = b$, le due medie proporzionali z, x eguagliano la b, e la verga resterà equilibrata in posizione orizzontale sostenuta dall'ostacolo K: se la PR sia più piccola di PU, riuscirà impossibile l'incontro delle tre direzioni in un punto, lo che indica non potersi ottenere l'equilibrio in qualunque situazione, che passi per l'ostacolo K, come in realtà accader debbe, essendo impossibile che la x porzione della verga compresa tra l'ostacolo e il muro sia più corta della distanza tra'l muro e lo stesso ostacolo.

Con questo problema ha molta analogia l'altro in cui cercasi dove si debba situare il fulcro K acciocchè una trave PQ appoggiata al muro MN in un dato angolo, rimanga in equilibrio; il punto ricercato, quello sarà dove la normale LK ferisce la trave.

Se abbiasi desío di sapere quando la verga non equilibrata scenda dalla parte del muro, e quando salga, dirò che avrassi la salita, se il punto L, dove si segano le direzioni della reazione del muro e dell'ostacolo, sia tra'l muro e la direzion del peso; ma se il punto L d'intersecamento, e il muro prendano in mezzo la direzione del peso, avrassi la discesa.

Pongasi la verga PKQ in sito orizzontale onde KL si confonda con KU; non avendosi in questo caso alcuna spinta contro il muro, non nascerà reazione, e perciò preponderando la verga dalla parte di Q, il peso H scenderà innalzando la parte PK della verga, che verrà costretta a seguirlo; per ottenere dunque l'equilibrio, converrà che la verga prenda una si-

tuazione PK, che faccia col muro l' angolo MPK acuto dalla parte di M, imperciocchè se lo facesse ottuso, non si avrebbe similmente reazione del muro, che potesse contrastare col peso H. La direzione KL pertanto, che, posta la verga orizzontale, si confonde con KU, incominciando l' angolo MPK ad essere acuto, incomincia a scostarsi dalla KU, e si avvicina alla QL direzione del peso, ed il punto di segamento di KL coll' orizzontale PL si accosta alla direzione QL del peso; talmente che facendosi sempre più acuto l'angolo MPK, la distanza tra 'l punto anzidetto e la direzione del peso andrà sempre più diminuendo, finchè non giunga ad incontrarla, ed in questo caso avrassi l' equilibrio. Prima peraltro di giungervi saremo sempre nel caso della situazione orizzontale, cioè il peso H scendendo innalzerà la parte KP della verga; passando in seguito la distanza del punto d'intersecamento della KL con PL di là dalla QL direzione del peso, cioè passando tal distanza dall' essere positiva all' essere negativa, nascerà moto in senso contrario al primo, e la verga PQ facendo continuamente angolo più acuto col muro verso M, precipiterà dalla parte del muro; le quali cose sono assai manifeste.

Venga ora in computo la resistenza del fregamento nata dalla scabrosità del muro, per cui rendesi alquanto complicato il problema. Prima d' intraprenderne la risoluzione avverto che la quantità di questa resistenza debbe esser nota, e tale la suppone il professore Fontana, poichè suppone cognita la sua proporzione alla reazione del muro, e la esprime colla lettera n. Se avesse supposta nota la proporzione della re-

sistenza al peso, si poteva determinare il centro di gravità di queste due forze parallele, e chiamata a' la parte della verga compresa tra questo centro, e l'estremità della verga appoggiata al muro, e sostituitala nell'equazione $x = \sqrt{a\,b^2}$ in luogo di a non segnata, onde nasca $x = \sqrt[3]{a'\,b^2}$, si veniva a determinare il dianzi indicato triangolo rettangolo, che mostra la maniera di risolvere il problema. Ma se vogliamo stare alla supposizione del Fontana, la determinazione del centro di gravità del peso e della resistenza nata dallo sfregamento si rende egualmente difficile che la risoluzione immediata del problema, dovendosi in ambedue i casi risolvere la stessa equazione di sesto grado.

Disegni come sopra la retta MN (Fig. II) il muro; K il punto immobile dell'ostacolo; PKQ la verga; Q sia il punto dove raccogliesi tutto il peso premente la verga secondo la verticale QL'. Si chiami $PK = x$, PU distanza dell'ostacolo dal muro cognita $= b$, $PQ = a$, e la ragione di PG orizzontale a GL' verticale sia quella della reazione del muro alla scabrosità in P, che si dirige in senso opposto alla direzione del peso H, che esprimasi per $1 : n$; condotta PL', questa esprimerà la direzione della forza combinata dalle due forze scabrosità, e reazione del muro; la quale pel nostro principio passar debbe per lo punto L' incontro della verticale QL' colla KL' normale alla verga PQ esprimente la direzione della reazione dell'ostacolo.

Essendo $PK : PQ = PU : PG$, per essere KU,

QG normali all' orizzontale PG, sarà $PG = \frac{a\,b}{x}$; ed essendo $PG : PL' = 1 : \sqrt{1+n^2}$, sarà $PL' = \frac{a\,b}{x}\sqrt{1+n^2}$; abbiamo ancora il triangolo PUK simile al triangolo PGQ, che è simile al triangolo QKL; quindi $KU : PU = KQ : KL'$, cioè $\sqrt{x^2-b^2} : b = a-x : KL' = b\,\frac{a-x}{\sqrt{x^2-b^2}}$; essendo adunque il triangolo PKL' rettangolo in K, nascerà l'equazione $\overline{PL'}^2 = \overline{PK}^2 + \overline{KL'}^2$, cioè $\frac{a^2\,b^2}{x^2}(1+n^2) = x^2 + \frac{b^2\,(a-x)^2}{x^2-b^2}$ che con picciolo giro di calcolo si riduce ad una equazione di sesto grado di questa forma $(x^3 - a\,b^2)^2 = n^3\,a^2\,b^2(x^2-b^2)$. Se in questa equazione pongasi lo sfregamento nullo, cioè $n = 0$; nasce $x = \sqrt[3]{a\,b^2}$ come sopra.

Se facciasi riflessione che la resistenza dello sfregamento non nasce se non nasce moto, e che il perfetto equilibrio esclude qualunque moto, sembra che nel porre la verga gravata da pesi nel richiesto equilibrio, attendere non debbasi allo sfregamento ma alla sola scabrosità e ruvidezza del muro; poichè sarà questa sempre pronta ad opporsi a qualunque moto si volesse indurre nella verga equilibrata: e perciò tal resistenza sempre più assicura la verga nell' equilibrio che si ot-

tiene indipendentemente dalla scabrosità del muro. Lo scioglimento adunque del presente problema potrà servire a determinare dentro quali limiti potremo azzardare di situare la verga perchè rimanga in equilibrio; posto che nota sia la quantità di tale resistenza, quantunque indipendentemente da questa l'equilibrio non fosse possibile.

L'equazione di sesto grado ritrovata dianzi mi apre la strada a mostrare ciò che ho asserito, cioè se si potesse determinare il punto R centro di gravità delle due forze parallele, peso e resistenza della scabrosità, il problema ci condurrebbe al solito triangolo rettangolo delle quattro continue proporzionali. Dal punto L dove s'incontrano la PG, e la KL' normale in K alla verga PQ; se si innalzi alla orizzontale PG la normale LR che incontrerà la PQ in R, dico che questo punto è il centro di gravità delle due forze scabrosità e peso, lo che così dimostro. Estratta la radice quadrata dall'equazione di sesto grado sopra esposta, ritroveremo $x^3 = a\,b\,(b \pm n\sqrt{x^2 - b^2})$; mi determino al segno meno, che serve al caso in cui l'estremità P della verga, rotto l'equilibrio, fosse per elevarsi radendo il muro, e perciò venisse in campo la scabrosità di esso per opporsi.

Il cubo adunque x^3 o sia della PK eguaglia il solido parallelepipedo contenuto dalle tre rette a, b, e $b - n\sqrt{x^2 - b^2}$; condotta KT normale a PL', che sega l'orizzontale PG in Z, per la similitudine de' triangoli KZU, PTZ, GPL', sarà $KU : UZ = PT : TZ = PG : GL' = 1 : n$; dunque $UZ = n\,KU = n\sqrt{x^2 - b^2}$;

e $PZ = b - n\sqrt{x^2 - b^2}$; dunque le tre rette del parallelepipedo eguale al cubo $\overline{PK}^3$, sono PQ, PU, PZ; ma il rettangolo $LPU = \overline{PK}^2$ nel triangolo rettangolo PKL, dunque il solido $PK \times LP \times PU$ eguaglia il solido $PQ \times PU \times PZ$; onde sarà il rettangolo $PK \times PL = PQ \times PZ$, e perciò $PQ : PK = PL : PZ$, e congiunta QL, sarà questa parallela a KZ; quindi $PU : PZ = PC : PL = PQ : PR$; e dividendo $PZ : ZU = PR : RQ$. Ora a cagion dell' equilibrio si ha nel triangolo $PL'Q$ la gravità per QL' alla forza combinata per PL' come il seno dell'angolo $PL'K = PKT$ al seno dell'angolo $KL'C = QPC$; cioè come $PT : UK = PZ : ZK$; ed essendo per la similitudine de'triangoli rettangoli KUZ, PGL', $ZK : ZU = \sqrt{1 + n^2} : n$ come la forza combinata alla scabrosità, sarà in ragione ordinata la forza di gravità o sia il peso alla scabrosità come $PZ : ZU = PR : RQ$; dunque abbiamo il peso alla scabrosità in ragion reciproca delle distanze dal punto R. Dunque il punto R è il centro di gravità delle due forze peso e scabrosità, cioè dove si possono esse supporre riunite, e sollecitanti la verga per la verticale RL. Per la qual cosa le direzioni PL, KL, RL delle tre forze, cioè reazione del muro, reazione dell'ostacolo, e peso combinato colla scabrosità, passando tutte per lo punto L, saranno in equilibrio. Ecco adunque dimostrato, che se si avesse il centro di gravità del peso e della scabrosità del muro, si sarebbe sciolto il problema col solito triangolo rettangolo delle quattro continue proporzionali.

Ma vediamo dove tenda l' equazione $x^3 = ab^2 +$

$n\,a\,b\,\sqrt{x^2-b^2}$, in cui il termine $n\,a\,b\,\sqrt{x^2-b^2}$ è positivo. Quando il coefficiente $n=0$, abbiamo veduto nascere il caso semplice considerato dall'Eulero; quando n è positivo da cui nasce il termine $n\,a\,b\,\sqrt{x^2-a^2}$ negativo, è il caso considerato dal professore Fontana, in cui s'introduce la resistenza nata dalla scabrosità del muro, in opposizione all'innalzamento della porzione KP della verga, cioè nel caso che la scabrosità dovesse contrastare al peso II, il quale fosse in procinto di rompere l'equilibrio, e di strascinare seco la verga. Se dunque suppongasi n negativa, onde nasca il termine $n\,a\,b\,\sqrt{x^2-b^2}$ positivo, saremo nel caso in cui la resistenza della scabrosità è per opporsi alla caduta della verga tra il muro ed il punto d'appoggio K, cioè quando il peso fosse nel limite da non poter più impedire questa discesa, ed in tal caso la scabrosità favorirebbe il peso II, perchè l'ajuterebbe ad impedire il precipizio della verga tra il fulcro ed il muro: dico adunque che l'equazione $x^3=a\,b\,(b+n\,\sqrt{x^2-b^2})$ serve a determinare il centro di gravità in questo caso.

Ritenute le stesse denominazioni della figura seconda, (Fig. III.) e le stesse lettere ai punti analoghi, in vece di prendere la $G\,L'$ sotto l'orizzontale $P\,G$, si prenda di sopra, onde sia $G\,P:G\,L'$ come la reazione del muro alla scabrosità, cioè come $1:n$, perciò $P\,L'$ sia la direzione della forza combinata; prodotta KL' finchè seghi $P\,C$ prolungata in L, ed essendo $K\,L$ la direzione della reazione dell'ostacolo normale alla verga $P\,Q$, e $Q\,G$ la direzione del peso, dovranno per la no-

stra legge dell'equilibrio incontrarsi le tre direzioni in un punto L'; quindi il peso alla forza combinata come il seno dell'angolo $KL'P = PKT$, (cioè condotta KT normale a PL' che prodotta taglierà PC in Z) al seno dell'angolo $KL'Q = QPZ$, e preso per seno tutto PK, come $PT:KU$; e per la similitudine de'triangoli PTZ, UKZ come $PZ:ZK$; ma $ZK:ZU = :PL':CL'$ cioè come la forza combinata alla scabrosità; dunque sarà il peso alla scabrosità come $PZ:ZU$. Ora abbiamo dall'equazione il cubo $\overline{PK}^3$ eguale al solido parallelepipedo rettangolo compreso dalle tre rette $PQ \times PU \times PZ$, ed essendo il quadrato di PK eguale al rettangolo LPU, sarà il rettangolo $QP \times PZ = PK \times PL$ onde $QP:PL = PK:PZ$, e perciò congiunta QL riuscirà parallela a KZ; ed essendo ancora KU parallela a QC, avremo $PZ:ZU = PL:LC = PR:RQ$ (innalzando dal punto L alla PL la normale LR, che determina nella PQ prodotta il punto R), ma si è dianzi dimostrato $PZ:ZU$ come il peso alla scabrosità; dunque $PR:RQ$ come il peso alla scabrosità; e perciò il peso alla resistenza nata per la scabrosità del muro presa negativamente in ragion reciproca di $QR:PR$, cioè delle loro distanze dal punto R; questo punto adunque è tale, che collocata in esso la differenza delle predette forze parallele, otterrassi equilibrio; lo che è il carattere del centro di gravità delle medesime. Ecco pertanto dimostrato, che l'equazione $x^3 = ab(b + n\sqrt{x^2 - b^2})$ serve a determinare il centro di gravità del peso e della resistenza di scabrosità presa negativamente, come l'altra equazione $x^3 = ab(b - n\sqrt{x^2 - b^2})$ serve a determinare il centro di gravità del peso, e della resistenza stessa considerata

positivamente pronta ad opporsi al peso in Q, se tentasse disturbare l' equilibrio e di costringere la verga a precipitare dalla parte di KQ.

Liberate queste equazioni dal radicale, si perviene alla stessa equazione di sesto grado $\overline{x^3 - ab^2}^2 = n^2 a^2 b^2 \times \overline{x^2 - b^2}$: le cui radici debbono determinare la situazione della verga in cui rimanga equilibrata.

Non è difficile risolvere questa equazione costruendola colle curve. Pongasi $x^2 - b^2 = y^2$, si avrà subito l' iperbola equilatera del semiasse trasverso $= b$; sostituito questo valore nell' equazione di sesto grado, nasce $\overline{x^3 - ab^2}^2 = n^2 a^2 b^2 y^2$, ed $x^3 = n a b \times \overline{\frac{b}{n} \pm y}$ equazione alla parabola prima di terzo grado; combinate queste due curve secondo i soliti metodi delle costruzioni, si comprenderà che l' equazione debbe sempre avere due radici immaginarie; non mi diffondo in queste ricerche che niente hanno di particolare.

Il professore Fontana si maraviglia, che dal suo calcolo, quando si supponga la verga non grave, sparisca il peso p, o si computi o no la scabrosità del muro; la qual cosa significa, che qualunque sia il peso, prenderà la verga sempre la stessa positura; ma se si rifletta che l' equilibrio nasce dalle reazioni del muro e dell' ostacolo, sembra che la maraviglia debba cessare, perchè essendo determinate le reazioni dalle circostanze nelle quali si ritrova la verga gravata, quando ottiensi l' equilibrio, egli è cosa assai naturale, che ritenute le stesse circostanze, debbon nascere reazioni in costante relazione al peso; ed in fatti le due dire-

zioni QL, PL del peso e della reazione del muro debbonsi tagliare ad angolo retto, essendo la prima verticale, e la seconda orizzontale, e perchè la terza KL direzione della reazione dell'ostacolo, deve esser sempre normale a PQ, e deve passare pel punto L, resta determinata la forma del triangolo rettangolo PLQ, quindi la proporzione dei seni dell'angolo retto PLQ, PLK, e dell'angolo KLQ, che dalla statica si sa essere quella della forza per KL o sia della reazione dell'ostacolo, della forza QL o sia del peso, e della forza per PL o sia della reazione del muro. Onde nascendo sempre reazioni proporzionali a'pesi che le eccitano, la positura della verga dovrà sempre ritornare la stessa per quanto si cangi la quantità del peso, e si ritengano gli altri dati del problema; ancor quando si computi la scabrosità dee accadere lo stesso, purchè si supponga, che la quantità della scabrosità si cangi proporzionalmente alla reazione del muro, lo che tacitamente fa il chiar. Autore ritenendo sempre la stessa lettera n; altrimenti al cangiarsi della n la verga cangierebbe positura.

Ma ciò che il prof. Fontana dice poter sembrare più singolare e memorabile si è che il peso infinitamente picciolo non possa supporsi zero assoluto, perchè per picciolissimo che sia il peso o enormemente grande, una e costante è la situazione della verga; ma se il peso sia nullo assolutamente, le posizioni della verga, come egli dice, *per rimanere equilibrata e immobile, sono infinite*. Il paradosso per altro sarà soltanto per quelli che confondono le quantità minori di qualunque data, che sonosi chiamate infinitesime, collo zero

assoluto; rispettando sempre l' autorità degli uomini sommi che opinano in contrario, niente può darsi di più lontano dalla mente di chi introdusse in geometria il metodo mirabile degl' infinitesimi, o sia delle quantità minori di qualunque data; nè dee sorprendere se mutando i dati del problema come avviene supponendo la verga ora gravata ora non gravata, si abbiano risultati totalmente opposti. Non so per altro se quando si suppone la verga non gravata, si possa cercare equilibrio, se non vogliamo confondere lo stato d' equilibrio colla semplice quiete.

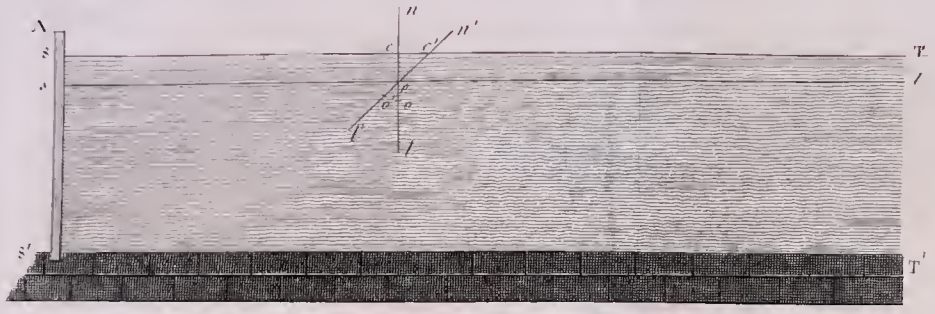


Fig 1

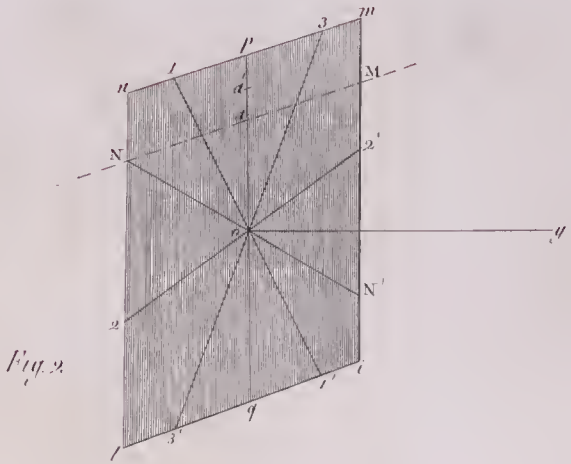


Fig 2

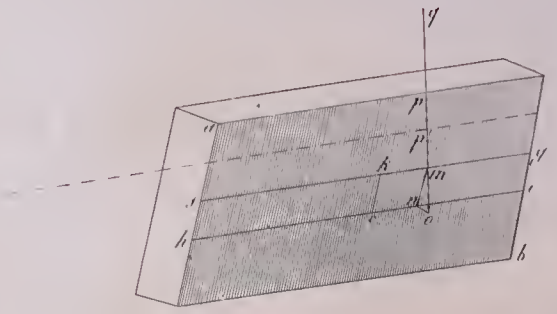


Fig 5

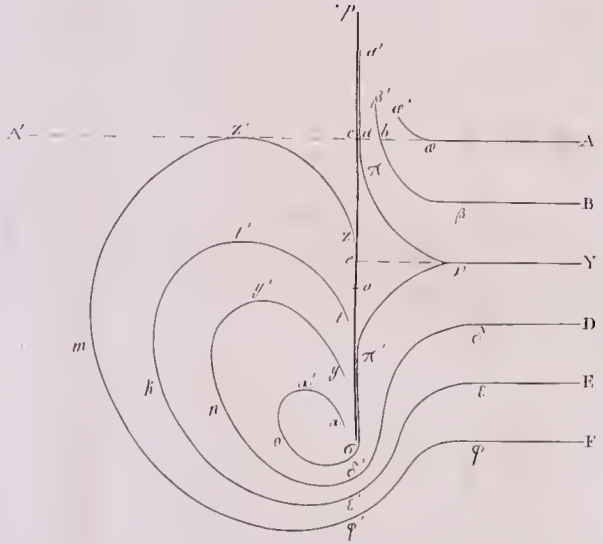


Fig 3

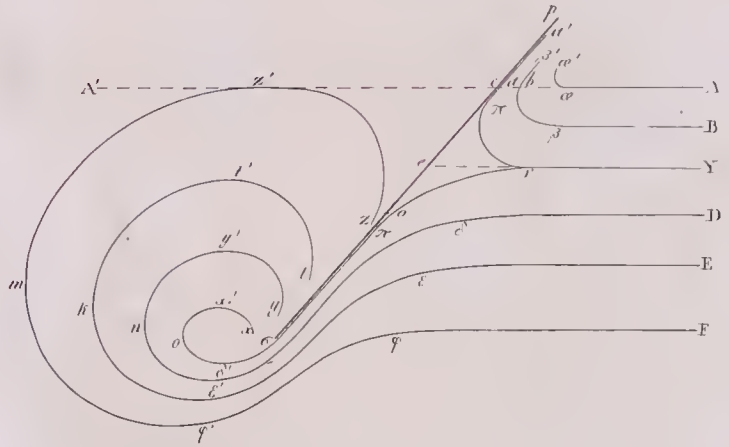


Fig 4

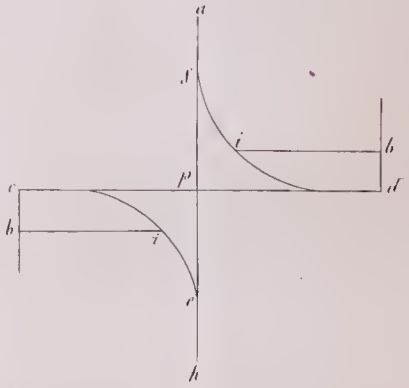


Fig 6

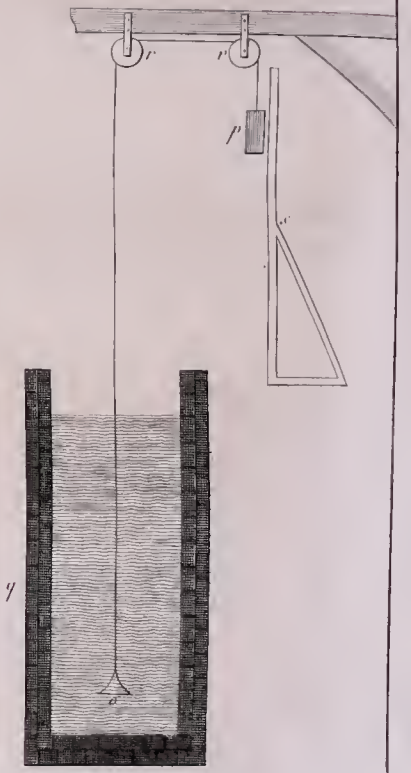


Fig 7

NUOVE RICERCHE

Dirette a rettificare la teoria della resistenza de' fluidi, e le sue applicazioni.

Di Giuseppe Avanzini

MEMORIA SECONDA

ricevuta il dì 11 settembre 1807

In questa seconda memoria tratteremo del centro di resistenza tanto diretta, che obbliqua nel caso che il fluido sia indefinito, e incompressibile, ed il solido una piana e sottil lamina rettangolare in parte soltanto immersa nel fluido, e moventesi uniformemente in linea retta, e orizzontale, e coi lati minori parimente orizzontali.

PARTE I.

INVESTIGAZIONE SPERIMENTALE DEL CENTRO DI RESISTENZA

Cap. I.

Apparecchj per l' esperienze

1. Si adoprarono otto lamine di ferro della grossezza di mezza linea incirca, e della grandezza e del peso indicato dalla seguente tavola

Lamine	*Lunghezza*	*Larghezza*	*Peso*
I	17 poll. 7 $\frac{1}{2}$ lin.	7 poll. 9 lin.	oncie 19 $\frac{1}{2}$
II	17 poll. 7 $\frac{1}{2}$ lin.	3 poll. 10 lin.	12 $\frac{1}{2}$
III	17 poll. 7 $\frac{1}{2}$ lin.	2 poll.	4 $\frac{1}{2}$
IV	8 poll. 10 $\frac{1}{2}$ lin.	3 poll. 10 lin.	6 $\frac{1}{2}$
V	8 poll. 10 $\frac{1}{2}$ lin.	5 poll. 10 lin.	8 $\frac{1}{2}$
VI	8 poll. 10 $\frac{1}{2}$ lin.	2 poll. 10 lin.	6
VII	11 poll. 10 lin.	3 poll. 10 lin.	8
VIII	6 poll.	3 poll. 10 lin.	3

La metà superiore d' ambedue le superficie anteriore e posteriore di ciascuna lamina era divisa, per gli usi che si noteranno, in pollici, linee, e quarti di linea.

2. Per muovere ciascuna lamina in linea retta e orizzontale, feci uso della macchina descritta ai paragrafi 5, 6, 7, 8, 9 della prima memoria, e rappresentata dalla fig. 1. tav. II. della memoria medesima.

3. Per muoverla in parte immersa in un fluido incompressibile, mi servii dell'acqua del canale descritto al § 1 della citata memoria introducendo in esso canale soltanto quella quantità di acqua necessaria per coprire una data porzione della lamina; e perchè si potesse considerare l' acqua per cui moveasi la lami-

na, come un fluido indefinito, s' ebbe l' avvertenza di tenerla tanto distante dal fondo, e dai lati del canale, che per tutto quanto lo spazio di 70 piedi che si faceva percorrere alla lamina, il moto da essa eccitato nell' acqua non giugnesse nè al fondo, nè ai lati suddetti.

4. Gli artificj per muovere la lamina uniformemente, e con differenti velocità furono quegli stessi che sono descritti ai paragrafi 15, 16, ec. della sopraccitata memoria.

5. Suppongasi $AS'T'T$ (fig. 1) la sezione longitudinale del canale, ST' il livello dell'acqua, ln il profilo della lamina verticale, lc la porzione immersa, e l'asse de' perni intorno ai quali, conformemente a quanto si è detto nella 1ª. memoria, la lamina aggirasi, e rimane equilibrata sotto qualunque angolo net, $n'et$ si metta; ct rappresenti la linea retta, e orizzontale per la quale l' asse e, e perciò anche la lamina ln è tirata mediante gli artificj descritti nella 1ª. memoria. Lasciando, come si disse ai paragrafi 5, 6, 7, mem. 1ª, partir la lamina normale, o inclinata alla direzione et del suo movimento si osserva ciò che si notò al § 22 mem. 1ª.; cioè 1°. ch' essa lamina incomincia ad oscillare intorno ad e finchè percorsi i quindici o venti primi piedi si ritrova accomodata, e ferma sotto un angolo senza il più piccolo moto di oscillazione sino al termine della sua corsa, vale a dire per tutto lo spazio rimanente di settanta e più piedi. 2°. che quest'angolo è retto come net, od acuto, come $n'et$ secondo la distanza maggiore, o minore di e dall'estremità inferiore l della lamina. Ciò premesso, si comprenderà

facilmente, che per rinvenire il centro di resistenza della lamina, quand' essa si muove sotto un angolo dato, e ad una data immersione, basterà misurare l'angolo $n'ct$, sotto il quale si accomoda la lamina medesima, e la distanza $n'c'$ dell'estremità n' dal livello c' del fluido. In fatti per tutto il tratto dello spazio che la lamina percorre accomodata immobilmente sotto qualunque siasi angolo, il centro di resistenza da quella incontrata dee trovarsi (§ 25; mem. 1ª.) continuamente sull' asse c d' equilibrio, ossia in un punto c della superficie anteriore della lamina, dal quale innalzata e prolungata verso l' asse suddetto una normale alla superficie medesima passi per lo stesso asse. Donde chiaramente si scorge che se si rinvenisse la lamina accomodata sotto l'angolo, a cagione d' esempio di 50°, sarà certo che per tale angolo il centro di resistenza deve trovarsi in c, cioè alla distanza precisamente dall'estremità inferiore l della lamina, a cui trovasi l' asse d' equilibrio. Dico inoltre, che colla misura di $n'c'$ si conoscerà la lunghezza $l'c'$ e quindi il centro o' di grandezza della porzione immersa della lamina. Supposta, per esempio, la lunghezza $l'n'$ della lamina di 10 pollici, e $c'n'$ di 3 pollici, sarà $c'l' = 7$ pollici, e quindi $l'o'$ di 3 pollici, 6 linee. Ritrovate $l'c$, $l'o'$ si troverà co' cioè la distanza del centro di resistenza del fluido da quello di grandezza della superficie immersa della lamina.

Tale è il metodo di cui feci uso negli sperimenti che or ora passerò a descrivere. Alla misura degli angoli $n'ct$ servì l' artificio esposto al § 32; mem. 1ª., e per conoscere la porzione $c'n'$ che rimaneva fuor d'ac-

qua, fermata la lamina sotto l' angolo rinvenuto, si aspettava che l' acqua fosse tranquilla, poi si contava a qual grado della divisione (§ 1) della lamina corrispondeva il livello *st* dell' acqua medesima.

Cap. II

Sperimenti e loro risultati

6. La descrizione degli sperimenti istituiti colle regole indicate nei paragrafi precedenti si ha dalle seguenti tavole. La velocità in esse notata è espressa dal numero di secondi, e terzi spesi dalla lamina a percorrere uniformemente 10 piedi. Le distanze dell' asse d' equilibrio, e del centro di grandezza della parte immersa della lamina sono prese dal lato inferiore della lamina, ed espresse in linee, e frazioni di linea. Ciascuno di questi sperimenti è il medio risultante da venti, e più, e la massima differenza fra questi ultimi nella misura degli angoli non fu che di pochi minuti.

Sperimento I.

Lamina I	Velocità = 7″, 0‴	Angolo 90°
Distanza dell' asse d' equilibrio = 82		
Distanza del centro di grandezza = 78 $\frac{3}{4}$		

SPERIMENTO II.

Lamina I	Velocità 12″, 0‴	Angolo 90°
Distanza dell' asse d' equilibrio = 81		
Distanza del centro di grandezza = 78 $\frac{3}{4}$		

SPERIMENTO III.

Lamina II	Velocità 7″, 0‴	Angolo 90°
Distanza dell' asse d' equilibrio = 80 $\frac{1}{3}$		
Distanza del centro di grandezza = 78 $\frac{3}{4}$		

SPERIMENTO IV.

Lamina II	Velocità 12″, 0‴	Angolo 90°
Distanza dell' asse d' equilibrio = 80		
Distanza del centro di grandezza = 78 $\frac{3}{4}$		

Sperimento V.

Lamina III	Velocità 7″, 0‴	Angolo 90°
Distanza dell' asse d' equilibrio 79		
Distanza del centro di grandezza = 78 $\frac{3}{4}$		

Sperimento VI.

Lamina III	Velocità 12″, 0‴	Angolo 90°
Distanza dell' asse d' equilibrio = 78 $\frac{4}{5}$		
Distanza del centro di grandezza = 78 $\frac{3}{4}$		

Sperimento VII.

Lamina III	Velocità 4″, 20‴	Angolo 90°
Distanza dell' asse d' equilibrio = 82 $\frac{1}{4}$		
Distanza del centro di grandezza = 78 $\frac{3}{4}$		

SPERIMENTO VIII.

Lamina II	Velocità 4″, 20‴	Angolo 90°
Distanza dell' asse d' equilibrio = 82 $\frac{1}{2}$		
Distanza del centro di grandezza = 78 $\frac{3}{4}$		

SPERIMENTO IX.

Lamina IV	Velocità 7″, 0‴	Angolo 90°
Distanza dell' asse d' equilibrio = 44 $\frac{13}{25}$		
Distanza del centro di grandezza = 43 $\frac{1}{2}$		

SPERIMENTO X.

Lamina V	Velocità 7″, 0‴	Angolo 90°
Distanza dell' asse d' equilibrio = 46 $\frac{1}{2}$		
Distanza del centro di grandezza = 43 $\frac{1}{2}$		

Sperimento XI.

Lamina VI	Velocità 7″, 0‴	Angolo 90°
Distanza dell' asse d' equilibrio = 44		
Distanza del centro di grandezza = 43 $\frac{1}{2}$		

Sperimento XII.

Lamina VII	Velocità 6″, 4‴	Angolo 90°
Distanza dell' asse d' equilibrio = 59		
Distanza del centro di grandezza = 58		

Sperimento XIII.

Lamina VIII	Velocità 14″, 54‴	Angolo 90°
Distanza dell' asse d' equilibrio = 30		
Distanza del centro di grandezza = 29 $\frac{2}{3}$		

SPERIMENTO XIV.

Lamina II	Velocità 14″, 0‴	Angolo 90°
Distanza dell'asse d'equilibrio = 88		
Distanza del centro di grandezza = 87		

SPERIMENTO XV.

Lamina IV	Velocità 4″, 50‴	Angolo 90°
Distanza dell' asse d' equilibrio = 49		
Distanza del centro di grandezza = 45		

SPERIMENTO XVI.

Lamina II	Velocità 5″, 17‴	Angolo 90°
Distanza dell' asse d' equilibrio = 87 $\frac{1}{4}$		
Distanza del centro di grandezza = 83		

Sperimento XVII.

Lamina VII	Velocità 8″, 6‴	Angolo 85°
Distanza dell' asse d' equilibrio = 59		
Distanza del centro di grandezza = 58 $\frac{1}{2}$		

Sperimento XVIII.

Lamina VII	Velocità 8″, 14‴	Angolo 81°
Distanza dell' asse d' equilibrio = 58 $\frac{1}{2}$		
Distanza del centro di grandezza = 55		

Sperimento XIX.

Lamina VII	Velocità 7″, 4‴	Angolo 69°
Distanza dell' asse d' equilibrio = 58 $\frac{1}{2}$		
Distanza del centro di grandezza = 54 $\frac{3}{4}$		

SPERIMENTO XX.

Lamina VII	Velocità 5″, 15‴	Angolo 68°
Distanza dell' asse d' equilibrio = 59		
Distanza del centro di grandezza = 55 $\frac{1}{2}$		

SPERIMENTO XXI.

Lamina VII	Velocità 8″, 21‴	Angolo 60°
Distanza dell' asse d' equilibrio = 58		
Distanza del centro di grandezza = 53 $\frac{3}{4}$		

SPERIMENTO XXII.

Lamina VII	Velocità 8″, 32‴	Angolo 58°
Distanza dell' asse d' equilibrio = 59		
Distanza del centro di grandezza = 53		

Sperimento XXIII.

Lamina VII	Velocità 5″, 55‴	Angolo 60°
Distanza dell' asse d' equilibrio = 59		
Distanza del centro di grandezza = 52 $\frac{1}{2}$		

Sperimento XXIV.

Lamina VII	Velocità 4″, 54‴	Angolo 58°
Distanza dell' asse d' equilibrio = 58 $\frac{3}{4}$		
Distanza del centro di grandezza = 52 $\frac{1}{4}$		

Sperimento XXV.

Lamina VII	Velocità 8″, 4‴	Angolo 42°
Distanza dell' asse d' equilibrio = 59		
Distanza del centro di grandezza = 53		

SPERIMENTO XXVI.

Lamina VII	Velocità 5″, 25‴	Angolo 41°
Distanza dell' asse d' equilibrio = 59		
Distanza del centro di grandezza = 53 $\frac{1}{2}$		

SPERIMENTO XXVII.

Lamina I	Velocità 8″, 20‴	Angolo 78°
Distanza dell' asse d' equilibrio = 67		
Distanza del centro di grandezza = 63 $\frac{1}{4}$		

SPERIMENTO XXVIII.

Lamina I	Velocità 7″, 21‴	Angolo 66°
Distanza dell' asse d' equilibrio = 67		
Distanza del centro di grandezza = 63		

Sperimento XXIX.

Lamina I	Velocità 7″, 16‴	Angolo 56°
Distanza dell' asse d' equilibrio = 67		
Distanza del centro di grandezza = 59 $\frac{3}{4}$		

Sperimento XXX.

Lamina I	Velocità 4″, 44‴	Angolo 54°
Distanza dell' asse d' equilibrio = 67		
Distanza del centro di grandezza = 58 $\frac{1}{2}$		

Sperimento XXXI.

Lamina I	Velocità 8″, 36‴	Angolo 48°
Distanza dell' asse d' equilibrio = 67		
Distanza del centro di grandezza = 57 $\frac{1}{4}$		

SPERIMENTO XXXII.

Lamina I	Velocità 4″, 36‴	Angolo 48 ½°
Distanza dell' asse d' equilibrio = 67		
Distanza del centro di grandezza = 57		

SPERIMENTO XXXIII.

Lamina I	Velocità 8″, 14‴	Angolo 38°
Distanza dell'asse d' equilibrio = 67		
Distanza del centro di grandezza = 55		

7. In tutti questi sperimenti trovandosi l'asse d'equilibrio sopra il centro di grandezza della parte immersa della lamina, e nell'asse medesimo dovendo cadere (§ 5) il centro di resistenza, è agevole il conoscere che qualunque sia la porzione immersa della lamina, qualunque la sua larghezza, velocità, e inclinazione, sempre il centro di resistenza cade nel centro di grandezza della suddetta porzione immersa della lamina.

Sopra la verità di questa conclusione non dovrà certamente cader dubbio alcuno, qualora pel centro della resistenza incontrata dalla lamina in ciascuno dei sopra descritti sperimenti vogliasi intendere il centro comune della resistenza opposta dall'acqua alla parte immersa della lamina, e della resistenza che l'aria dovrà pure opporre alla parte della lamina che rimane fuori del fluido. Ora vedremo come, dato dallo sperimento il centro comune di queste due resistenze, si possa rinvenire il centro della sola resistenza dell'acqua. Supposta r la resistenza dell'aria, R quella dell'acqua, d la distanza del centro della prima dall'asse de' perni, D quella del centro della seconda, è manifesto che, dovendo il centro comune di tutte due cadere, e rimanere sull'asse de' perni per tutto il tempo speso dalla lamina a percorrere accomodata senza oscillare, sotto un certo angolo, dovrà per tutto questo tempo essere $r \cdot d = R \cdot D$, e quindi $D = \frac{r \cdot d}{R}$, e perciò, chiamata Δ la distanza dell'asse de' perni dal lato inferior della lamina, x la ricercata distanza del centro di resistenza dell'acqua dal lato suddetto, sarà $x = \Delta - \frac{r \cdot d}{R}$.

Inoltre, essendo la resistenza di un fluido qualunque in ragione diretta composta della densità del fluido, dell'area urtante, e di una funzione della velocità del solido, supposta $m : n$ la ragione della densità dell'acqua a quella dell'aria, l la larghezza della lamina, A l'altezza dell'immersione, a quella dell'emersione, φ la funzione della velocità, cui è proporzionale la resistenza, sarà $l \cdot a$ l'area della lamina premuta dall'aria,

$l.A$ quella premuta dall'acqua, $m.l.A.\varphi = R$, $n.l.a.\varphi = r$, e quindi $x = \Delta - \frac{d.n.l.a.\varphi}{m.l.A.\varphi} = \Delta - \frac{d.n.a}{m.A}$, ma (mem. 1) $d = \frac{1}{2}a$, e, come è noto, $m : n = 1000 : 1$, dunque $x = \Delta - \frac{a^2}{2000\,A}$. Ma pel primo sperimento si ha $\Delta = 82$ linee, $a = 54$ lin., $A = 157$ lin., perciò si avrà $x = 82 - \frac{54^2}{2000 \,.\, 157} = 82 - \frac{9}{1000} = 81\,\frac{991}{1000}$. Il che dimostra, che la distanza del centro della sola resistenza dell'acqua dal lato inferiore della lamina era minore soltanto di 9 millesime di linea della distanza del centro comune di ambedue le resistenze. Con lo stesso metodo trovandosi una presso che uguale differenza anche per ciascuno degli altri sperimenti, rendesi manifesto che si potrà tenere per dimostrato, che il centro della resistenza dell'acqua cade sopra il centro di grandezza della parte immersa della lamina, qualunque sia la sua immersione, velocità, inclinazione, e grandezza.

8. Dai sopra descritti sperimenti si può rilevare ancora, che la distanza del centro di resistenza varia secondo le differenti grandezze d'immersione, secondo le varie larghezze, velocità e inclinazioni della lamina. Nulladimeno per le ragioni addotte al § 42 della 1ª. memoria rappresenterò nelle seguenti tavole queste medesime variazioni.

Distanze dell' asse d' equilibrio ossia del centro di resistenza corrispondenti alle varie immersioni della lamina.

I.

Larghezza = 46	Velocità = 7″, 0‴	Angolo 90°
Immersioni	157 $\frac{1}{2}$	87
Distanze dell' asse d' equilibrio	1 $\frac{7}{12}$	1 $\frac{1}{2}$

II.

Larghezza = 46	Velocità 5″, 0‴	Angolo 90°
Immersioni	167 $\frac{1}{2}$	90
Distanze dell' asse d' equilibrio	4 $\frac{1}{4}$	4

III.

Larghezza = 46	Velocità = 27″, 0‴	Angolo 90°
Immersioni	174	59 $\frac{1}{3}$
Distanze corrispondenti dell' asse d' equilibrio	1	$\frac{1}{3}$

Da queste tavole risulta manifestamente, che per lo stesso angolo, e per la stessa velocità, e larghezza della lamina il centro di resistenza si allontana un poco più dal centro di grandezza quando cresce l' immersione.

Distanze dell' asse d' equilibrio corrispondenti alle varie larghezze della lamina.

I.

Immersione 157 $\frac{1}{2}$	Velocità 7'', 0'''	Angolo 90°	
Larghezze della lamina	93	46	24
Distanze corrispondenti dell'asse d'equilibrio	3 $\frac{1}{4}$	1 $\frac{7}{12}$	$\frac{1}{4}$

II.

Immersione 157 $\frac{1}{2}$	Velocità 12'', 0'''	Angolo 90°	
Larghezze della lamina	93	46	24
Distanze corrispondenti dell'asse d'equilibrio	2 $\frac{1}{4}$	1 $\frac{1}{4}$	$\frac{1}{20}$

III.

Immersione 87	Velocità 7″, 0‴	Angolo 90°	
Larghezze della lamina	71	46	35
Distanze dell'asse d'equilibrio	2 $\frac{3}{4}$	1 $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

Queste tavole dimostrano, che per lo stesso angolo e per la stessa immersione, e velocità della lamina il centro di resistenza si allontana sensibilmente più dal centro di grandezza a misura che s' ingrandisce la larghezza della lamina.

Distanze dell' asse d' equilibrio corrispondenti alle differenti velocità della lamina.

I.

Immersione 157 $\frac{1}{2}$	Larghezza 93	Angolo 90°
Velocità	7″, 0‴	12″, 0‴
Distanze dell' asse d' equilibrio	3 $\frac{1}{4}$	2 $\frac{1}{4}$

II.

Immersione 157 $\frac{1}{2}$	Larghezza 46		Angolo 90°
Velocità	4″, 20‴	7″, 0‴	12″, 0‴
Distanze dell' asse d' equilibrio	3 $\frac{3}{4}$	1 $\frac{7}{12}$	1 $\frac{1}{4}$

III.

Immersione 157 $\frac{1}{2}$	Larghezza 24		Angolo 90°
Velocità	4″, 20‴	7″, 0‴	12″, 0‴
Distanze dell' asse d' equilibrio	4 $\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{20}$

Nelle tavole precedenti si scorge, che per lo stesso angolo, e per la stessa immersione, e larghezza della lamina il centro di resistenza si allontana dal centro di grandezza quanto più cresce la velocità.

Distanze dell' asse d' equilibrio corrispondenti ai varj angoli d' inclinazione della lamina.

I.

Immersione 106 $\frac{3}{4}$	Larghezza 46	Velocità 8″, 26‴
Angoli	60°	58°
Distanze dell'asse d' equilibrio	4 $\frac{3}{4}$	5 $\frac{1}{2}$

II.

Immersione 120 $\frac{1}{2}$	Larghezza 93	Velocità 8″, 28‴
Angoli	78°	48°
Distanze dell'asse d' equilibrio	3 $\frac{3}{4}$	9 $\frac{3}{4}$

III.

Immersione 115 $\frac{1}{2}$	Larghezza 93	Velocità 4″, 40‴
Angoli	54°	48 $\frac{1}{2}$°
Distanze dell'asse d' equilibrio	8 $\frac{1}{2}$	10

IV.

Immersione 114 $\frac{1}{4}$	Larghezza 93	Velocità 8″, 25‴
Angoli	48°	38°
Distanze dell'asse d'equilibrio	9 $\frac{3}{4}$	10

V.

Immersione 115 $\frac{1}{2}$	Larghezza 93	Velocità 4″, 40‴
Angoli	54°	48 $\frac{1}{2}$°
Distanze dell'asse d'equilibrio	8 $\frac{1}{2}$	10

Queste tavole manifestano, che per la stessa immersione, larghezza, e velocità della lamina il centro di resistenza si scosta da quello di grandezza a misura che si fa più acuto l'angolo d'inclinazione della lamina.

Cap. III.

RACION FISICA DEI RISULTATI DELLE SPERIENZE.

9. A indagare la ragione meccanica per cui il centro di resistenza opposta dall' acqua alle lamine debba cadere nel sito indicato dagli sperimenti è necessario premettere come abbiamo fatto nella memoria 1ª alcune osservazioni sul movimento che le lamine eccitano nel fluido.

Art. I.

Del movimento del fluido.

10. Incominciamo dal caso che la lamina si muova direttamente, ossia ad angolo retto colla direzione del suo proprio movimento. Sia essa rappresentata in prospettiva dalla fig. 2, ed immersa nel fluido fino ad N M.

Osservazione 1ª. Per ciò che si è detto al § 11, e 48 della 1ª. memoria si potrà stabilire

1°. che in ogn' istante del moto della lamina una porzione di fluido dovrà fuggire dalla parte anteriore alla posterior della lamina medesima per cedere ad essa il sito che va progressivamente occupando.

2°. che vi sarà un filo per esempio $o\,y$, dal quale il fluido si muoverà come da centro verso ogni punto del perimetro della lamina.

3°. che supposto per la lamina passare un piano verti-

cale, che la divida nelle due metà $npql$, $mpqi$, il filo suddetto dovrà passare per un punto della linea pq.
4°. che il filo sarà normale alla superficie della lamina.
5°. che supposte qp, 11′, NN′, 22′, 3′3 tante sezioni fatte da altrettanti piani che passino per oy, il fluido che si muoverà verso i punti opposti 1 1′, N′, N; ec. si muoverà pei piani che formano le sezioni 11′, NN′, ec.
6°. che supposto pF (fig. 3) il piano verticale passante per pq della fig. 2, ed eY il filo centrale, A′A il livello del fluido, αA, βB, υY, δD, εE, ϕF, altrettanti fili del fluido paralleli al filo centrale eY, i due fili superiore e inferiore che si trovano al contatto di eY incomincieranno a muoversi da qualche punto per esempio υ, descrivendo il superiore la linea $\upsilon\pi a'$ e l'inferiore la linea $\upsilon\pi'\sigma$, e gli altri le $\beta\beta'$, $\alpha\alpha'$, $\delta\delta'$, $\varepsilon\varepsilon'$, $\phi\phi'$, le quali si accosteranno tanto più alla linea retta quanto più si discosteranno dal filo centrale eY.
7°. che il fluido $\upsilon\pi a'\alpha\beta\upsilon$, $\upsilon\pi'\sigma\phi\delta\upsilon$, oltre al movimento per le linee $\upsilon\pi a'$, ec.; $\upsilon\pi'\sigma$, ec., ne avrà un altro comune a tutte le sue particelle nella direzione eY, uguale, e diametralmente opposto al movimento della lamina.
8°. che il fluido contenuto nello spazio $\upsilon\pi\pi'$ avrà il solo movimento della lamina.
9°. che simili movimenti dovrà concepire anche il fluido scorrente per gli altri piani.

Osservazione 2ª. Siccome una porzione $a\alpha\alpha' a'$ del fluido che si muove nel piano che dimezza verticalmente la lamina deve innalzarsi al di sopra della superficie aA di livello, così se ne dovrà innalzare una porzione anche di quello che si muove negli altri pia-

ni, e produrre ciò che da noi chiamasi generalmente *labbro di fluido*, e dai francesi *Remou*.

Osservazione 3ª. Il fluido $a\alpha$, $\alpha' a'$ dovrà a cagione del proprio peso perdere a poco a poco tutto il movimento per aa', $b\beta$, $\alpha\alpha'$, e pervenuto ad una certa altezza per esempio a', β', α' spandersi tutto all' intorno, e cadere verso la superficie aA del comune livello.

Osservazione 4ª. Per ciò che spetta al ufflido $\nu\pi'\sigma\delta'\varphi'\varphi\varepsilon\delta\nu$ dico 1°. che pervenuto in σ, δ', ε', φ' dovrà passare dietro alla lamina per le linee $\sigma o x'$, $\delta' n y'$, $\varepsilon' k t'$, $\varphi' m z'$. Ciò è dimostrato nel citato paragrafo 48 della 1ª. mem. 2°. che giunto in z', y', t', x' dovrà piegarsi per le curve $x'x$, $y'y$, tt', $z'z$, e lasciar vacuo lo spazio $z'zc$. La velocità assoluta del fluido nei punti qualunque z', y', t', x' sarà composta della velocità generata dal moto della lamina, per cui il fluido passerebbe dietro ad essa anche se non fosse grave, e della velocità dovuta all'altezza delle colonne sopraincombenti alle particelle x', y', t', x'; di modo che supposta m l'altezza dovuta alla velocità di y' prodotta dal moto della lamina, p quella dovuta al peso del fluido sopraincombente, la velocità assoluta di y', cioè quella con la quale la particella y' correrebbe dietro alla lamina sarà $\sqrt{m} + \sqrt{p}$, e supposta a l'altezza dovuta alla velocità della lamina, la velocità relativa della particella y' sarà $\sqrt{m} + \sqrt{p} - \sqrt{a}$. Inoltre è manifesto, e dimostrato anche dalla sperienza, che la velocità del fluido che passa per $\sigma\varphi'$ non è uguale in tutte le sue particelle, ch' essa è *massima*, e maggiore della velocità della lamina nelle particelle σ vicinissime alla sua

estremità σ, e *minima* anzi nulla nelle particelle ϕ' che separano il fluido in moto dal laterale in quiete. Perciò picciolissima dovrà essere anche la velocità del fluido per $\phi' m z'$, e grande, e maggiore della velocità della lamina quella delle particelle moventisi per $\sigma o x'$. Parimente la velocità prodotta dal peso del fluido sopraincombente deve esser zero in z', e aumentarsi nelle particelle inferiori. Da tuttociò è facile il raccogliere, che la velocità $\sqrt{m} + \sqrt{p}$ del fluido al contatto di tutta una porzione, per esempio $c z$ sarà minore della velocità $\sqrt{a}$, e quindi il fluido innanzi a tutta quella porzione dovrà rimanere indietro lasciando un vacuo tra esso, e la lamina; 2° che la velocità $\sqrt{m} + \sqrt{p}$ del fluido al contatto dell' altra porzione $z \sigma$ sarà maggiore della velocità $\sqrt{a}$ della lamina, e perciò il fluido innanzi a tutta questa porzione respinto dall' ostacolo della lamina dovrà piegarsi per tt', yy', xx'. Ciò dovendo accadere anche al fluido moventesi negli altri piani, rimane manifesto che dietro alla lamina la superficie del fluido si deprimerà, lasciando tra esso, e la lamina un vacuo, o *Cavità* che rimarrà per tutto il tempo, che la lamina medesima spenderà a percorrere uniformemente i 70 ultimi piedi della sua corsa.

Osservazione 5ª. 1°. L'altezza del labbro deve esser maggiore in parità di circostanze della cavità. La cagione produttrice del labbro essendo la velocità colla quale il fluido fugge verso l' estremità superiore p (fig. 3.) della lamina, è manifesto che, aumentandosi questa velocità deve aumentarsi anche quella con cui il fluido fuggirà verso il lato inferiore, e perciò anche la velocità per le curve $\sigma o x'$, $\delta' n y'$, $\phi' m z'$, quindi

sminuirsi (osserv°. 4ª.) lo spazio *o z*. 2°. L' altezza del labbro deve crescere in proporzione di qualche funzione della velocità della lamina; ciò si comprenderà facilmente, osservando che la velocità colla quale il fluido fuggirà verso il lato superiore deve essere tanto maggiore quanto più grande sarà quella della lamina. 3° Per la stessa velocità, e immersione della lamina il labbro del fluido deve crescere in proporzione di qualche funzione della larghezza della lamina medesima. Crescendo la larghezza di essa lamina tanto più difficilmente il fluido si muoverà verso l' estremità laterali della lamina, perciò più velocemente dovrà muoversi verso i lati superiore, e inferiore. 4° Crescendo l' altezza d'immersione della lamina deve sminuirsi l'altezza del labbro. E' manifesto che quanto più profondamente sarà immersa la lamina, tanto maggiore difficoltà avrà il fluido a muoversi verso i lati superiore, e inferiore, perciò minore velocità per innalzarsi sopra il livello. Tutte queste verità furono confermate dagli sperimenti istituiti per rinvenire il centro di resistenza, osservando attentamente in ciascuno di essi a qual grado della divisione fatta nelle due superficie della lamina trovavasi il fluido innalzato innanzi ad essa, ed abbassato di dietro quando percorreva i 70 ultimi piedi uniformemente. I risultati di tali osservazioni sono esposti nelle seguenti tavole, nelle quali tanto le altezze dei labbri, quanto le profondità delle cavità sono espresse in linee, ec.

Altezze dei labbri, e delle cavità corrispondenti alle differenti velocità della lamina.

I.

Lamina II	Immersione 14 poll. 2 linee	
Velocità	9″, 5‴	6″, 9‴
Altezze corrispondenti del labbro	6	9
Altezze corrispondenti della cavità	2 $\frac{1}{2}$	5

II.

Lamina V	Immersione 7 poll. 6 $\frac{3}{4}$ linee	
Velocità	7″, 34‴	5″, 5‴
Altezze corrispondenti del labbro	7	11
Altezze corrispondenti della cavità	4 $\frac{1}{2}$	5

III.

Lamina IV	Immersione 7 poll. 4 $\frac{1}{2}$ linee		
Velocità	15′, 52″	10″, 54‴	5″, 44‴
Altezze corrispondenti del labbro	2 $\frac{3}{4}$	4	17
Altezze corrispondenti della cavità	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

Altezze del labbro, e della cavità corrispondenti alle varie larghezze della lamina.

I.

Velocità 12″, 6‴	Immersione 13 poll. 11 ½ linee	
Larghezze	93	46
Altezze corrispondenti del labbro	2	1 ½
Altezze corrispondenti della cavità	2 ½	½

II.

Velocità 9″, 30‴	Immersione 13 poll. 11 ½ linee		
Larghezze	93	46	24
Altezze corrispondenti del labbro	8	5	3 ½
Altezze corrispondenti della cavità	8 ½	3	2 ½

III.

Velocità 7″ 20‴	Immersione 13 poll. 11 ½ linee		
Larghezze	93	46	24
Altezze corrispondenti del labbro	8	4 ½	3
Altezze corrispondenti della cavità	6	3	2 ½

IV.

Velocità 5″, 20‴	Immersione 13 poll. 11 ½	
Larghezze	46	24
Altezze corrispondenti del labbro	9 ½	8 ½
Altezze corrispondenti della cavità	8	5

Altezze del labbro, e della cavità, corrispondenti alle differenti altezze d' immersione.

I.

Velocità 6″, 9‴	Larghezza 3 poll. 11 ½ linee		
Immersioni	169 ½	116	83 ½
Altezze corrispondenti del labbro	9	12 ½	16
Altezze corrispondenti della cavità	5	7	10

11. Per ciò che risguarda il caso in cui la lamina si muove obbliquamente, coi ragionamenti del paragrafo precedente si giungerà alle stesse conclusioni; ch' è quanto dire, a dimostrare, che anche quando la lamina si muoverà obbliquamente come quando si muove direttamente.

1°. il fluido innanzi ad essa si muoverà per le linee (fig. 4) $\nu\pi aa'$, $\beta b\beta'$, $\alpha\alpha'$; $\nu\pi'\sigma$, $\delta\delta'$, $\varphi\varphi'$; e giunto in

σ, δ', ϕ continuerà per le curve $\sigma o x' x$, $\delta' n y' y$, $\phi' m z' z$

2°. che si formerà il labbro $\alpha a a' \alpha'$, siccome pure la cavità $z' z c$.

3°. che l'altezza del labbro dovrà crescere in proporzione di qualche funzione della velocità, e della larghezza della lamina, e scemare in proporzione di qualche funzione della quantità d'immersione.

La sola differenza tra i moti che concepirà il fluido nei due casi del moto diretto ed obbliquo della lamina si ridurrà a ciò, che nel caso dell' obbliquità p e Y il filo centrale e Y sarà più lontano dalla estremità inferiore σ della lamina di quello sia quand' essa si muoverà direttamente.

Art. II.

Perchè il centro e *(fig. 3. e 4.) della resistenza tanto diretta che obbliqua debba cadere fuori del centro di grandezza* o *della parte immersa* c σ *della lamina verso la sua estremità superiore, e a tanto maggiore distanza* o e *quanto è più acuto l' angolo* p e Y *(fig. 4.) come lo mostrano gli sperimenti.*

12. Abbiamo veduto (§. 10. 11) che quando la lamina si muove direttamente o obbliquamente, il fluido s' innalza innanzi ad essa fino ad una certa altezza a' (fig. 3, e 4), e di dietro si abbassa fino in z. Ora si osserverà 1° che per tale innalzamento il fluido aumenterà la sua pressione contro ogni elemento della parte immersa $a \sigma$ di una quantità proporzionale al suddetto alzamento $a a'$, e che inoltre impiegherà ancora una pres-

sione contro la porzione $a\,a'$ della lamina. Dal che si scorgerà evidentemente che la pressione del fluido contro $o\,a'$ sarà maggiore della pressione contro $o\,\sigma$. 2°. che per l'abbassamento $c\,z$ il fluido non premerà più la porzione $c\,z$, e perciò la pressione contro la posterior parte $o\,c$ della lamina sarà minore della pressione contro l'altra porzione $o\,\sigma$. Ciò premesso la resistenza del fluido non essendo altro che la differenza delle due pressioni anteriore e posteriore, essa dovrà esser maggiore sopra $o\,a'$ che sopra $o\,\sigma$, e quindi il centro di essa dovrà cadere sopra il centro o di grandezza della parte immersa $c\,\sigma$.

13. Siccome poi quando la lamina si muove obbliquamente il filo centrale c Y deve cadere (§. 11) ancor più lontano dall'estremità σ, così la resistenza dovrà esser maggiore sopra $o\,a$ quando la lamina si muove sotto un angolo acuto che quando si muove ad angolo retto, e perciò anche la distanza $o\,e$ del centro della resistenza medesima dovrà essere maggiore nel primo caso che nel secondo.

PARTE II.

CONFRONTO DELLE FORMOLE CON GLI SPERIMENTI

Confronto della formola ordinaria.

14. Supposta b la larghezza della lamina $l\,n$, ovvero $l'\,n'$ (fig. 1); θ l'angolo $n'\,e\,t$, c la porzione $l\,c$, ossia $l'c'$ immersa nel fluido, $\sqrt{a}$ la sua velocità; $b\,d\,x$ un rettangoletto o differenziale della superficie ante-

riore della lamina preso a distanza x dall' estremità l, o l'; per la formola ordinaria la resistenza diretta opposta dal fluido all'elemento $b\,dx$ dovrà essere $b\,dx.a$, perciò

$\int x\,.\,b\,dx\,.\,a$ la somma dei momenti, $\int b\,dx\,.\,a$ la resistenza totale, e quindi

$\frac{\int x\,.\,b\,dx\,.\,a}{\int b\,dx\,.\,a} = \frac{c}{2}$ la distanza del centro della resistenza diretta dall'estremità l. Inoltre per la formola ordinaria la resistenza obbliqua incontrata dall' elemento $b\,dx$ dovrà essere $b\,dx\,.\,a\,sin^2\theta$, perciò

$\int x.b\,dx.a\,sin^2\theta$ la somma dei momenti, $\int b\,dx.a\,sin^2\theta$ la resistenza totale, e

$\frac{\int x\,.\,b\,dx\,.\,a\,sin^2\theta}{\int b\,dx\,.\,a\,sin^2\theta} = \frac{c}{2}$ la distanza del centro della resistenza obbliqua dall' inferiore estremità l della lamina. Egli è quindi fuor d' ogni dubbio che, per la formola ordinaria, il centro della resistenza tanto diretta che obbliqua deve cadere non sopra il centro di grandezza della parte immersa della lamina, come lo dimostrano gli sperimenti, ma sibbene nello stesso centro di grandezza.

Confrontando poi questi risultati della formola con quelli degli sperimenti esposti nelle tavole del § 8 si rileverà 1°. che la differenza tra il vero centro di resistenza, e quello che si rinviene con la formola deve essere tanto più grande, quanto è più grande la velocità e la larghezza della lamina, e più picciola la

porzione di cui essa lamina trovasi sotto il fluido. 2°. che per una mediocre velocità, e grandezza della lamina la differenza suddetta, quando la lamina si muove direttamente, è di una ventesima parte incirca, e quando si muove obbliquamente giugne fino ad una sesta parte della metà della parte immersa.

15. La cagione principale dell' errore della formola quando la lamina si muove ad angolo retto si troverà agevolmente nella ommissione fatta nel calcolo della formola medesima dell' intumescenza, e depressione del fluido.

Ai paragrafi 12, e 13 abbiamo veduto che l' una e l' altra aumentando sensibilmente la resistenza opposta dal fluido alla metà superiore della porzione immersa della lamina debbono anche allontanare dal centro di grandezza di tale porzione il centro della resistenza totale, ed accostarlo al lato superiore della lamina. In fatti nei nostri sperimenti si osservò costantemente, che la differenza nelle distanze dei due centri era piccola, e giugneva appena ad una linea ogni volta che così piccola si rinveniva anche l' altezza del *labbro*, e della *cavità*.

Quanto all' errore della formola. nel caso del moto obbliquo della lamina, alla sopraccennata cagione devesi aggiugnere la maggiore difficoltà che (§ 49; mem. 1ª.) incontra il fluido a muoversi verso il lato superiore della lamina quando essa muovesi obbliquamente che quando si muove ad angolo retto. Questa maggiore difficoltà, parimente trascurata del tutto nella formola ordinaria, deve aumentare (§ 61; mem. 1ª.) la resistenza opposta dal fluido alla metà superiore della super-

ficie urtante della lamina, e quindi allontanarne viepiù il centro dal lato inferiore di essa.

Confronto della formola di Juan.

16. Supposta a l' altezza $l\,c$ (fig. 1) dell' immersione della lamina, u la sua velocità, secondo la formola di Juan la distanza $e\,c$ da lui stesso ritrovata (a) del centro di resistenza dalla superficie del fluido deve essere

$\frac{3\,a^{\frac{5}{2}}}{5\,(a^{\frac{3}{2}}+\frac{u^3}{64^2})}$, ossia $\frac{3\,.\,64^2\,.\,a^{\frac{5}{2}}}{5\,(64^2\,.\,a^{\frac{3}{2}}+u^3)}$. Questa espressione dimostra evidentemente, che rimanendo costante l'immersione a, e variando la sola velocità u, questa può essere di tale grandezza da rendere

$\frac{3\,.\,64^2\,.\,a^{\frac{5}{2}}}{5\,(64^2\,.\,a^{\frac{3}{2}}+u^3)}$ maggiore, uguale, ed anche minore di $\frac{1}{2}\,a$; il che è quanto dire, che per la formola di Juan il centro di resistenza può trovarsi e sotto, e nello stesso centro di grandezza della parte immersa della lamina, ed anche sopra di esso centro secondo la maggiore, o minore grandezza della velocità u; ciò che si oppone diametralmente alli sperimenti, nei quali, sic-

(a) Examen maritime théorique, et pratique ec. par Don Georges Juan. ec. traduit de l'espagnol avec des additions par M. Leveque. Nantes 1783 Tomo 1. pag. 336.

come abbiamo veduto, qualunque sia la velocità della lamina il centro di resistenza cade sempre sopra il centro di grandezza della parte immersa.

17. La cagione di questa disparità tra il vero centro di resistenza, e quello della formola di Juan deesi, per mio avviso, ripetere principalmente dalla radice quadrata dell'altezza del fluido introdotta dall'Illustre Geometra nella sua formola della resistenza; la quale radice, siccome pure nessun'altra funzione dell'altezza del fluido, abbiamo veduto (§ 72; mem. 1ª) non doversi trovare nell'espressione della resistenza del fluido incompressibile, e nel caso che non nasca vacuo.

Per dimostrarlo con un esempio, osserveremo prima di tutto, che il termine u^3 che trovasi nell'espressione

$$\frac{3 \cdot 64^2 \cdot a^{\frac{5}{2}}}{5\,(64^2 \cdot a^{\frac{3}{2}} + u^3)}$$

della distanza del centro di resistenza è dovuto all'influenza dell'intumescenza e depressione del fluido computata da Juan nel calcolo della sua formola, di modo che, supposta zero, o picciolissima la suddetta intumescenza e depressione, la espressione

$$\frac{3 \cdot 64^2 \cdot a^{\frac{5}{2}}}{5\,(64^2 \cdot a^{\frac{3}{2}} + u^3)}$$

diverrebbe $\frac{3\,a}{5}$. Da ciò apparisce evidentemente che in questo caso, che è appunto quello in cui non nasce vacuo, per la formola di Juan il centro di resistenza dovrebbe cadere sotto il centro di grandezza della parte immersa della lamina, e alla distanza di esso centro uguale ad una decima parte di tutta l'altezza dell'immersione, quando i nostri sperimen-

ti dimostrano, che, qualora il *labbro*, e la *cavità* del fluido sono picciolissimi, il centro di resistenza cade al di sopra del centro di grandezza, e a picciolissima e trascurabile distanza da esso.

Ora vedremo che questa differenza tra i centri di resistenza della formola di Juan, e dell'esperienza nasce appunto dalla $\sqrt{a}$ contenuta nella formola suddetta. Supposta α un rettangoletto orizzontale della superficie anteriore della lamina, u la sua velocità, a l'altezza del fluido sopra il rettangoletto medesimo, la resistenza opposta ad esso rettangoletto è, secondo Juan, $\alpha u a^{\frac{1}{2}}$ (§ 69; mem. 1ª); or chi non vede che una tale formola, appunto perchè contiene $a^{\frac{1}{2}}$, deve porgere la resistenza maggiore pei rettangoletti più lontani dalla superficie del fluido, e minore pei rettangoletti più vicini, e quindi far cadere il centro della resistenza totale sotto il centro di grandezza della parte immersa della lamina?

PARTE III.

ERRORI NEGLI USI DELLE FORMOLE, E LORO RETTIFICAZIONI

Della stabilità de' paralellepipedi di picciola lunghezza.

18. Immaginiamo un paralellepipedo rettangolo di picciolissima lunghezza, immerso in un fluido tranquillo, e indefinito sino ad una data profondità a, e moventesi orizzontalmente, e in direzione paralella alle sue facce longitudinali; supposta k la distanza vertica-

le del centro di gravità del paralellepipedo dalla superficie del fluido, u la sua velocità, il sig. Juan ritrova che, computando il *labbro*, e la *cavità* del fluido, la stabilità del paralellepipedo è espressa dalla formola

$$m\,c\,u\,(\tfrac{1}{3}\,k\,a^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{5}\,a^{\frac{5}{2}}) + \frac{m\,c\,k\,u^4}{3\,.\,64^2}\,. \quad (a)$$

Le seguenti brevissime considerazioni ci dimostreranno che questa formola non può essere nè vera, nè esatta. Essa risulta dalla resistenza moltiplicata per la distanza del centro di gravità del paralellepipedo dal centro della resistenza. Secondo Juan la resistenza è

$\frac{1}{3}\,m\,c\,(a^{\frac{3}{2}}.u + \frac{u^4}{64^2})$, e la distanza del centro di gravità è

$k - \dfrac{3\,a^{\frac{5}{2}}}{5\,(a^{\frac{3}{2}} + \frac{u^3}{64^2})}$. Ora, supposta anche vera ed esatta la prima, tale, pel ragionamento del § 17 non potendosi considerare la seconda rendesi manifesto, che nè anche la risultante espressione della stabilità potrà ammettersi per sicura, e precisa.

19. Per rilevarlo più chiaramente con un esempio suppongasi il *labbro*, e la *cavità* entrambi sì piccioli da potersi ommettere senza esser grave; allora secondo Juan la resistenza sarebbe

$\frac{1}{3}\,m\,c\,.\,a^{\frac{3}{2}}\,.\,u$, e $k - \frac{3\,a}{5}$ la distanza del centro di resi-

(a) Opera, e pag. citate di sopra.

stenza da quelle di gravità del paralellepipedo, e quindi $m\,c\,u\,(\frac{1}{3}\,k\,a^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}\,a^{\frac{5}{2}})$ la stabilità. Ciò premesso, se si osserverà che $\frac{3\,a}{5}$ è, secondo Juan, la distanza del centro di resistenza dalla superficie del fluido, quando (§ 17) essa deve essere $\frac{a}{2}$, si conoscerà ad evidenza, che la stabilità non deve essere come crede Juan $m\,c\,u\,(\frac{1}{3}\,k\,a^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}\,a^{\frac{5}{2}})$, ma bensì $m\,c\,u\,(\frac{1}{3}\,k\,a^{\frac{3}{2}} - \frac{a^{\frac{5}{2}}}{6})$.

DESCRIZIONE

Di uno strumento acustico

DI GAETANO UTTINI

presentata a' 25 Maggio 1806

Quando io penso alla misera condizione di quelli che sono difettosi di udito, mi sento sorpreso da meraviglia, considerando che mentre coloro, i quali patiscon difetto di vista, hanno pronti tanti conforti al lor male, i sordi poi si ritrovano del tutto abbandonati, e privi affatto d' ogni soccorso alla loro sventura. Forse che ella è la sordità un piccolo male? Qual cosa più molesta, quale più luttuosa, quanto lo è il vedersi nel corso di questa vita mortale privo di quel sollievo, che nasce dal conversar cogli amici, e comunicarsi scambievolmente gli affetti, e i sentimenti dell' animo? Nel giudicare qual delle due disgrazie sia maggiore, se il perder la vista o l' udito, non s' accordan gli uomini in un medesimo sentimento, ma chi l' una crede più grande, chi l' altra. Che che ne sia di ciò, i sordi sono senza dubbio molto infelici, onde farà cosa degna di somma lode chiunque presterà ai

medesimi sovvenimento. Io certamente attesa la professione, alla quale fui applicato fin da' primi anni, reputo essere mio officio impiegare ogni industria e fatica a sollievo di questi non meno, che degli altri infermi, qualunque essi siano. Eccomi pertanto a proporre ciò, che da gran tempo rivolgo nell' animo, voglio dire un certo acustico lavoro, il quale rechi ai sordi un vantaggio, per quanto è possibile, uguale a quello che recano gli occhiali a chi è infermo di vista. Io mi accingo, il conosco, ad un' impresa difficile, impresa, che ben so essere stata con successo poco felice tentata da uomini assai di me più valenti. Ma questo appunto anzi che avvilirmi, mi ha reso più coraggioso. Imperocchè le fatiche degli altri hanno diminuito le mie, e se essi presero un qualche abbaglio, ciò a me serve d' avviso per evitarlo.

Fra quelli poi, i quali faticarono in questo suggetto si deve annoverare in primo luogo il chiarissimo Le Cat. Avendo egli sul terminare di quel suo bel libro intorno all' orecchio umano esaminate con la maggior diligenza tutte le invenzioni degli altri, descrive in ultimo luogo due istrumenti da lui immaginati, i quali servirono a me di scorta per formare il mio. Non deve rincrescere di sentire quali essi siano, onde si possa più agevolmente giudicare sul mio lavoro. Il primo istrumento adunque acconcio ad ajutare le orecchie non tanto inferme è fatto a guisa di una conca. Questa accoglie nella sua bocca, che è assai larga, molti raggi sonori, e colla sua concava figura li indirizza per modo, che tutti uniti vanno a penetrare il meato auditorio. Così viene a formarsi una stabile aggiunta all' orec-

chia esterna, poichè vi si attacca fermamente, e si sostiene dalla stessa orecchia, che viene introdotta nel cavo della suddetta conca per un forame ovale a un lato della medesima. Il lavoro è semplicissimo, come si vede, e se si presti fede al suo autore, è si comodo ad usarsi, che acconciamente applicato si nasconde sotto l'istessa parrucca.

L'altro poi che ha maggior forza, e che dal suo autore fu riservato a vincere la durezza delle orecchie al senso più restie, è composto di molte parti, e richiede maggior artifizio, mentre egli tutta intiera rassomiglia la fabbrica dell'orecchio umano. E' formato spezialmente di due parti, la prima delle quali, in cui vi sono varii seni, e varie giravolte, rappresenta la parte concava dell'orecchia esteriore, ed il meato auditorio; l'altra che vien dopo somiglia nel suo principio, che è molto largo, la cavità del timpano: in appresso restringendosi essa a poco a poco, e torcendosi in varie spire figura quella parte dell'orecchio, che dicesi coclea. Là, dove queste parti insieme si congiungono, avvi una pelle sottile, oppure una tela di seta, la quale fa le veci della membrana del timpano. Tali sono i sussidj apprestati dal Le Cat a sollievo de' sordi: leggiadre e sottili invenzioni, non può negarsi, quali appunto da un uomo tale aspettar si dovevano, ma non tali però, che pienamente corrispondano al desiderio dei sordi, i quali col trascurarle ben chiaramente dimostrano di non esserne punto contenti. Imperocchè riguardo al primo non è forse tanto da pregiarsi l'aumento dell'udito, quanto è da fuggirsi la noja del peso sovrastante all'orecchio. Riguardo all'al-

tro poi, lasciando eziandio da parte, ch' egli è un lavoro difficilissimo, e di una mole, che non può essere comoda ad usarsi, non rare volte addiviene, che col soverchio fragore stordisce piuttosto, anzichè egli giovi a render chiara la sensazione dell' udito.

Mentre io andava meco stesso ripensando a queste cose, mi venne in mente di ricercare, se si fosse potuto rinvenire un mezzo tale, che fosse immune da quegli incomodi, a cui sono soggetti gli strumenti del Le Cat. Esaminai per lungo tempo, e con molta attenzione la cosa, ed avendone più volte consultato un artefice sommamente industrioso, e sagace, immaginai finalmente due strumenti acustici che dal medesimo con maestria fabbricati, ora da me si rendono pubblici. Due, dissi, sono questi strumenti: imperocchè quantunque quello, ch' io avea immaginato da prima, avesse a suo favore e il giudizio di molti Dotti, ai quali io lo aveva comunicato, ed eziandio la stessa esperienza, mi piacque però di aggiungere anche l'altro, che essendo perfetto, e più vigoroso merita di essere preferito. Consiste quel primo in un' ellissoide cava tagliata secondo l' andamento dell' asse minore in due parti, o dir vogliasi in due emisferi ellittici, l' uno e l'altro de' quali è guarnito esteriormente nella sua sommità d'una piccola tromba. All'una di queste trombe, che nell'imboccatura è alquanto larga, si applica la voce: l' altra, che è più sottile della prima, e più lunga, ed è leggermente incurvata s'applica al meato auditorio. Penetra questa seconda tromba entro la cavità del prossimo emisfero, e si porta quasi fino al punto, in cui cade il rispettivo foco dell'ellisse. Uniti l'u-

no all' altro i due emisferi resta formata l' ellissoide, la cavità della quale viene divisa in due mediante una sottile membrana attaccata all' orlo dell' emisfero, che rimane dalla parte dell' orecchia. Questa membrana per mezzo di viti poste all' esteriore degli emisferi si può tendere più o meno secondo il bisogno. Ecco esposta tutta l' orditura della mia macchinetta. Prima però, ch' io renda ragione della medesima, fo avvertire, che non prendo io già il carico di provvedere a tutti i sordi, qualunque sia la cagione della loro sordità. Imperocchè allor quando la sordità deriva da un organo guasto, e del tutto rovinato, la cosa è disperata, e in questo caso non solamente io, ma nessun uomo del mondo è valevole a prestarle sovvenimento. Questo danno lo può ristorare soltanto quel Dio facitore, e creatore del corpo umano, il quale formò l' opera meravigliosa dell' orecchia.

Lasciando adunque i sordi di tal natura, a' quali non si può prestare altro sollievo, fuorchè una sterile compassione, a quelli solamente io esibisco questo mio istrumento, i quali hanno le orecchie non già guaste, ma soltanto poco bene disposte, a quelli cioè, che hanno bensì intatto l' organo dell' udito, ma o indebolito per la vecchiaja, o mortificato pel continuo rumore, o per qualsivoglia altra cagione languido, ed inerte per modo, che non si riscuota se non risvegliato da un suono molto gagliardo. All'ine per tanto di porgere un rimedio a si fatti sordi, giudicai dover io rivolgere le mie maggiori applicazioni, e tutta la mia premura a questo scopo, di formare cioè il mio lavoro in una maniera, che fra tutte fosse la più acconcia ad aumenta-

re il suono. Se io abbia ciò ottenuto parmi che il dimostri chiarissimamente l'aspetto istesso di questa macchinetta. Imperocchè i raggi sonori, che partono dall'imboccatura della prima tromba, vanno a ferire la membrana, che separa i due emisferi, parte direttamente, e in gran parte per riflessione sofferta nelle pareti del primo emisfero; e questi ultimi tendendo a raccogliersi presso il foco dell' ellisse, che resta entro l'altro emisfero, convien che si faccian convergenti, e acquistino così maggior energia. Grande pertanto sarà la forza, con cui verrà la membrana dai raggi sonori percossa. Un gagliardo moto adunque imprimerà essa all'aria contenuta nel secondo emisfero, e nella cavità della tromba ad esso annessa, e nel meato auditorio, in cui questa sbocca. Le pareti stesse di tutta la macchinetta concepiran tremori, e oscillazioni, che comunicandosi all'aria stessa interna, da cui furon eccitate, andranno ad aumentare il suono. Per fine i raggi sonori ancora, che cadono su la superficie interna della tromba, per cui si parla, ripercossi da questa entreranno in gran parte nella cavità del primo emisfero, e altri diretti, altri ripercossi dalle pareti del medesimo aumenteran la forza, con cui urtata viene la membrana, che dal secondo lo separa.

Appoggiato alla considerazione di queste cose giudicai questo strumento molto efficace per accrescere il suono. Nè m'ingannai certamente: poichè tutti quanti i sordi, i quali usarono di questo mio istrumento, benchè gravissima fosse la loro sordità, tutti, dissi, senza eccettuarne un solo diedero al di fuori manifesti segni dell'interna consolazione, che provavano nell'udi-

re contro il lor solito. In fatti quelle cose, che lor si dicevano quantunque con voce bassa, le compresero perfettamente, e le ripeterono parola per parola, sebbene chi loro parlava fosse alquanto discosto. Ma ciò era appunto quello, che io credeva dovesse succedere.

Un fenomeno però accadde fuori della mia aspettazione, ch' io penso di non dover passare sotto silenzio. Suole avvenire talora, che alcuno avendo le orecchie mal disposte provi dentro le medesime non so quale mormorio, che può essere anche prodotto dallo strumento medesimo senza che però la voce giunga meno vivace all' orecchio. In questo caso si è scoperto essere pronto il rimedio a questo incomodo soltanto che si faccia un foro in mezzo alla membrana posta fra li due emisferi, il che fatto, o tutto o quasi tutto cessa lo strepito. Se poi di un tale fenomeno si ricercasse la cagione, io crederei, che non si andasse lungi dal vero, giudicando, che una porzione d' aria discende per l'aperto foro dalla camera superiore nell'inferiore, e che l'aria, che in quella rimane, essendo meno inceppata e più libera, trasporti meglio, e più speditamente il suono forse in quella guisa che vediamo succedere nella cavità del labirinto, in cui gli acquedotti cotuniani servono a ricever parte dell' umor acqueo, il quale senza tale sfogo agli urti del piede della staffa o non cederebbe, se è incompressibile, o se è compressibile, si addenserebbe sempre con pregiudizio dell' udizione. Ma finora abbiamo parlato di quelle cose, che riguardano il primo dei due istrumenti da me sul principio proposti. Mi resta ora a trattare dell'altro.

Avendo io pertanto sentito, che alcuni in vece della figura ellittica, ch'io aveva data al mio istrumento, desideravano piuttosto la parabolica, forse credendo che per essere questa la forma, che si dà alla tromba stentorea, dovesse risultarne un istrumento più efficace, mi feci a considerare se fosse pur ciò da sperarsi. Ma tosto mi si fece presente alla mente il diverso effetto dei fochi delle due figure: nella parabola il foco fa che i raggi da esso provenienti ripercossi dalle pareti del tubo diventino paralleli, e però giova a portar la voce a grandi distanze; nell'ellisse l'un foco fa che i raggi da esso provenienti ripercossi diventino convergenti per unirsi nell'altro foco. Ora i raggi convergenti hanno essi maggior efficacia dei raggi paralleli: noi abbiam bisogno non di portar la voce a distanza grande, ma bensì di aumentarne notabilmente la forza. Dunque al nostr' uopo dee più della parabolica giovare la figura ellittica. Non prendendomi dunque alcun pensiero di cangiare la struttura del mio istrumento mi diedi a cercare se in qualche maniera potessi perfezionarlo facendogli qualche sì fatta giunta, onde i raggi sonori si radunassero nella sua cavità in maggior copia, e con più opportuna disposizione, talchè il corpo tutto, (per così dire) del suono diventasse più vigoroso; e mi parve, che ciò agevolmente ottener si potesse, soltanto che la tromba, la quale primiera accoglie la voce, si ampliasse, e nelle sue pareti si piegasse in forma d' ellisse avente l' uno de' fochi nella bocca stessa della tromba, e l'altro dentro il corpo dell'istrumento a portata del foco dell'ellissoide, il quale cade nell' emisfero, a cui quella trom-

ba appartiene. Tale essendo il parer mio non meno, che d'alcuni uomini in sì fatte materie intelligentissimi da me consultati, e tale specialmente essendo il parere del dottissimo signor Canterzani, tosto si venne dal pensiero ai fatti. Si mise in punto una tromba più grande, e di forma ellittica, la quale venne attaccata allo strumento in luogo della vecchia per modo, che una potesse facilmente sostituirsi all'altra, con questa mira appunto, che corredato lo strumento or di questa or di quella si potesse fare d'ambedue lo sperimento, e conoscere in fatti qual delle due superasse l'altra nell' efficacia. La qual cosa riusciva altresì opportuna a questo oggetto, che si poteva con un solo istrumento provedere a molti, e varii generi di sordità, ed anche allo stesso sordo, se, come suole avvenire, patisse egli di una sordità variante ora più, ora meno grave, e ciò cangiando soltanto la tromba, secondo che questa varia dentro l'istrumento la forza del suono. Per questa parte sola lo strumento guarnito della nuova tromba s'avvicina in qualche modo a quella vocal tromba, che inventata dall' Hasio vien descritta da Muschembroek nei suoi elementi di fisica, la quale essendo di due pezzi costrutta l'uno ellittico, l'altro parabolico, propagava la voce a una distanza grandissima. E ciò mi fece sperare di aver apportato al mio strumento un notabile vantaggio. In fatti perchè mandando noi pure per opera dell'amplificata ellittica tromba maggior copia di raggi sonori alla prima cavità del corpo dell'istrumento, non otterremo l'intento, che cioè l'effetto da esso prodotto riesca tanto maggiore?

Tutto va bene, dirà forse alcuno, queste ragioni

sono veramente plausibili. Ma ciò, che attender si debbe principalmente in questo affare, su via diteci, se avete fatto qualche prova di questo istrumento, e qual esito abbia ella sortito? L'esito fu del tutto opportuno, e felicissimo. La nuova tromba, che io aveva aggiunto al mio strumento, lo rese molto più efficace, che non era prima. Di ciò fanno testimonianza quei sordi, nei quali si è fatto lo sperimento. Imperocchè applicato loro l'istrumento prima fornito della vecchia tromba, poscia della nuova, concordemente protestarono, che essi avevano bensì in ambidue i tempi compreso assai bene le voci di chi parlava, ma di averle però udite la seconda volta meglio che la prima: della quale testimonianza e qual altra maggiore a dir vero si può richiedere, per affermare l'utilità di questa nuova tromba? Ma quei medesimi sordi però, che di questa utilità fanno fede, aggiungono in oltre (imperocchè nulla si dee dissimulare) che essi sentirono bensì le voci espresse più vivamente, ma però mescolate d'un qualche rumore, di modo che al commodo d'una maggior chiarezza nell'udire si congiungeva un qualche incomodo per questo mormorio. Ma benchè questo si dica con tutta verità, nondimeno non abbiamo motivo di prenderci su di ciò grande affanno. Imperocchè e qual sordo non soffrirà di buon animo questo mormorio, qualunque egli sia, purchè al tempo istesso egli faccia guadagno nel sentimento dell'udito? Che se per ventura lo strepito s'aumenti a segno, che o porti nocumento all'udito, o produca noja all'orecchia, avvi in pronto a questo male il rimedio, se aperto, come di sopra si disse, un foro nella membrana, che divi-

de per mezzo la concavità dello strumento, tutto o quasi tutto svanisce lo strepito. Finalmente per non ommettere cosa alcuna, che appartenga alla miglior riuscita di questa macchinetta, si avverte che alla di lei formazione il rame è più atto d'ogni altro metallo per la duttile, e sonora sua qualità: che la membrana, la quale divide la cavità dell' ellissoide, è presa dal gozzo di un pollo d' India opportunissima al divisato fine; e che per ultimo si dee guardare di non prendere colle mani il corpo della macchinetta nell'atto di usarla, ma a tenerla ferma si metta piuttosto la mano o nella tromba esteriore, o nel manico in uno dei due lati dello strumento.

Queste sono le cose, che a norma delle mie forze ho io procurato di fare a vantaggio de' sordi, affine di porgere con questa mia invenzione, qualunque ella sia, alcun sollievo alla loro sventura. Voglia il cielo, che siccome ho io adoperato ogni premura, ogni industria per questo lavoro, così ne abbia conseguito un frutto proporzionato.

TAVOLA PRIMA

rappresentante uno strumento ellissoide composto di due emisferi.

FIGURA I

A. B. *Trombe esteriori nella sommità dell' uno e dell'altro emisfero.*

A. *All' imboccatura di questa tromba più larga si applica la voce.*

B. *Questa tromba più sottile, e più lunga si applica al meato auditorio.*

CCC. *Viti per tendere più o meno la membrana, che divide la cavità dell' ellissoide.*

D. *Manico per usare dell' istrumento.*

E. *Madre vite da inserirvi o nell' uno, o nell' altro lato il detto manico.*

FIGURA II

F. *Membrana levata fuori dallo strumento forata.*

G. *Membrana levata fuori dallo strumento intiera.*

H. *Emisfero separato dall' altro.*

TAVOLA SECONDA

che rappresenta lo stesso strumento in ciò solo diverso dal primo, che la tromba, la quale riceve la voce, è più ampia, e piegata nelle sue pareti in forma di ellisse.

FIGURA I

A. B. *Trombe esteriori nella sommità dell' uno, e dell' altro emisfero.*

A. *All' imboccatura di questa tromba più larga si applica la voce.*

B. *Questa tromba più sottile, e più lunga si applica al meato auditorio.*

CCC. *Viti per tendere più o meno la membrana, che divide la cavità dell' ellissoide.*

D. *Manico per usare dell' istrumento.*

E. *Madre vite da inserirvi o nell' uno, o nell' altro lato il detto manico.*

III. *Viti, per le quali si attacca allo strumento questa tromba più grande, onde si possa sostituire all' altra in caso di bisogno.*

LL. *Fochi dell' ellisse.*

FIGURA II

M. *Membrana levata fuori dallo strumento intiera.*

N. *Emisfero coll' annessa tromba più grande.*

Fig 1

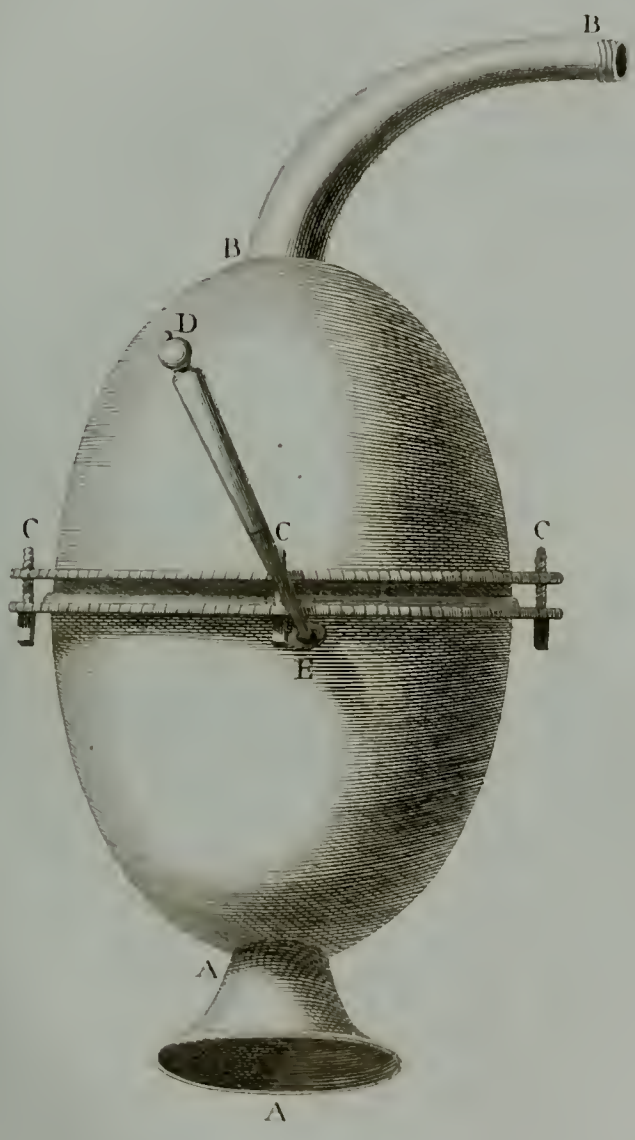


Fig 2

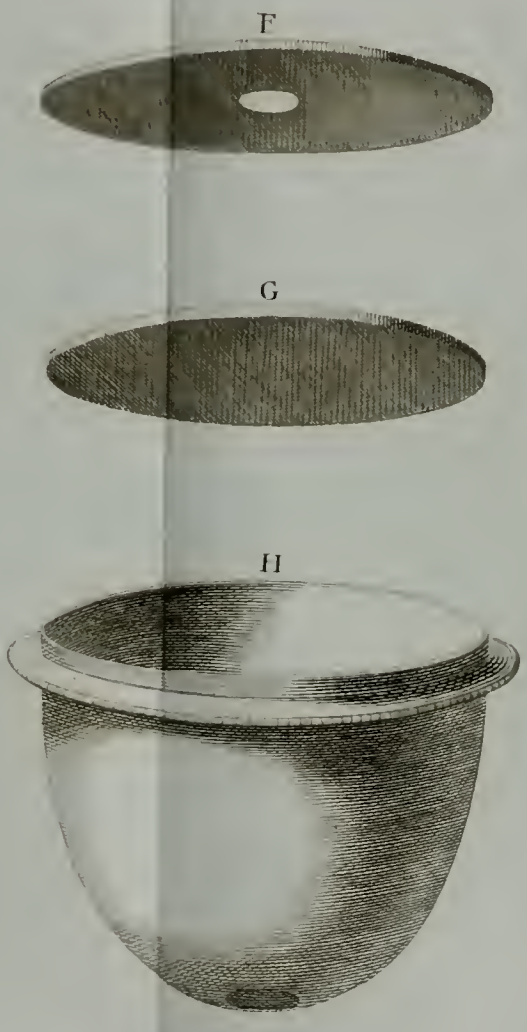


Fig 1

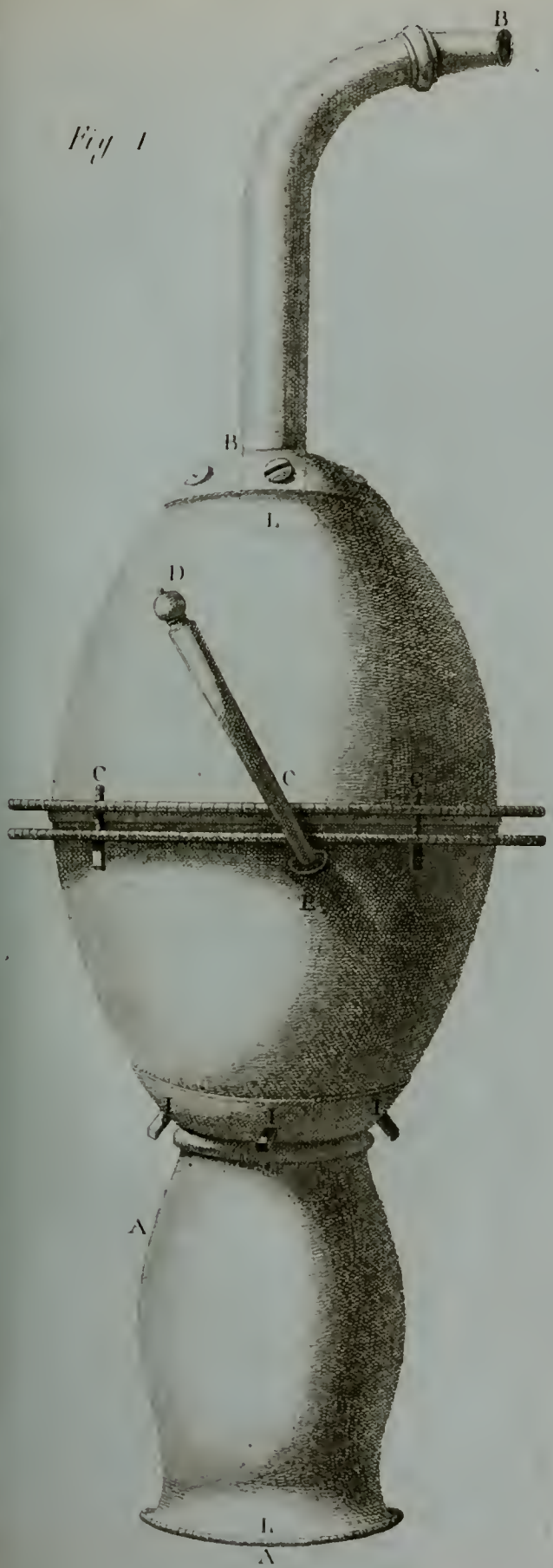


Fig 2

OSSERVAZIONI E SPERIENZE

sopra la teoria della resistenza de' fluidi del sig. Giorgio Juan

Di Giuseppe Avanzini

ricevute il dì 3 Dicembre 1807

1. L'illustre geometra sig. Giorgio Juan tiene per fermo, che la resistenza incontrata da un solido moventesi per un fluido quieto, grave, indefinito, e incompressibile, e immerso a tale profondità sotto la superficie di detto fluido, che il moto ad esso comunicato da quello del solido non giunga sino alla superficie suddetta sia proporzionale al prodotto della velocità del solido nella radice quadrata dell' altezza alla quale trovasi immerso *(a)*.

2. Supposto $\mu\, d\, \varepsilon$ un differenzio-differenziale della superficie urtante del solido, u la sua velocità, ε la distanza verticale di $\mu\, d\, \varepsilon$ della superficie, o livello del fluido, m il peso di un piede cubico di acqua, i principj sui quali Juan fonda la sua formola sono i se-

(a) Examen maritime théorique et pratique ec. par Don Georges Juan traduit de l'espagnol par M. Levèque. Nantes 1783.

guenti. 1°. che se anche il solido come il fluido non si movesse, la velocità con la quale il fluido uscirebbe per $\mu\, d\, \varepsilon$, se tutto ad un tratto trovasse per esso un libero passaggio, sarebbe $8\sqrt{\varepsilon}$. 2°. che quando $\mu\, d\, \varepsilon$ si movesse colla velocità u nella direzione stessa per cui il fluido si muoverebbe passando per $\mu\, d\, \varepsilon$, la velocità relativa sarebbe $\sqrt{\varepsilon} \pm u$: servendo il segno + pel caso che la superficie si movesse contro il fluido, e il segno — quand'essa se ne allontanasse, o che fuggisse dal fluido. 3°. finalmente, che la pressione del fluido contro il differenzio-differenziale $\mu\, d\, \varepsilon$ della superficie anteriore del solido deve essere

$$m \cdot \frac{\mu\, d\, \varepsilon}{64} (8\sqrt{\varepsilon} + u)^2 = m \cdot \mu\, d\, \varepsilon (\sqrt{\varepsilon} + \tfrac{1}{8} u)^2, \text{ ed}$$

$$m \cdot \frac{\mu\, d\, \varepsilon}{64} (8\sqrt{\varepsilon} - u)^2 = m \cdot \mu\, d\, \varepsilon (\sqrt{\varepsilon} - \tfrac{1}{8} u)^2$$

la pressione contro un eguale, e simile differenziale $\mu\, d\, \varepsilon$ della superficie posteriore. In fatti si scorgerà tosto, che la resistenza opposta dal fluido al differenziale anteriore dovendo essere uguale alla differenza delle due suddette pressioni, essa resistenza sarà

$$= \mu\, d\, \varepsilon (\sqrt{\varepsilon} + \tfrac{1}{8} u)^2 - \mu\, d\, \varepsilon (\sqrt{\varepsilon} - \tfrac{1}{8} u)^2 = \tfrac{1}{2} u \sqrt{\varepsilon},$$

che è appunto la formola di Juan.

3. Quanto al primo dei surriferiti principj, si osserverà, che quando il fluido ed il solido fossero in quiete, non può mettersi in dubbio che la velocità con la quale il fluido passerebbe pel differenziale $\mu\, d\, \varepsilon$ non fosse quella calcolata da Juan; per ciò poi che spetta

al secondo, concederò pure al sig. Juan, che la velocità rispettiva contro l' elemento anteriore sia la somma della velocità che avrebbe il fluido per la pressione di quello che sovrasta al differenziale $\mu\, d\, \varepsilon$, e della velocità del solido, ma non potrò giammai convenire con esso, che la velocità rispettiva del fluido posteriore sia la differenza delle due velocità suddette. Per poco che si consideri cosa debba accadere al fluido tranquillo quando per esso si move un solido, si rileverà 1°. che il solido premerà il fluido che gli sta innanzi. 2°. che per la nota proprietà de' fluidi continui, questa pressione dovrà comunicarsi al fluido posteriore. 3°. che per tale pressione il fluido posteriore, se anche non fosse grave, dovrà concepire una velocità nella direzione del movimento del solido. Dal che si comprenderà agevolmente, che, chiamata α l' altezza dovuta a questa velocità, la velocità rispettiva del fluido posteriore non sarà già come vuole Juan, $\sqrt{\varepsilon} - u$, ma $\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\alpha} - u$.

Quanto al 3°. principio, cioè che la pressione anteriore sia $(\sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{8} u)^2$, e la posteriore $(\sqrt{\varepsilon} - \frac{1}{8} u)^2$ io rifletto che anche nella supposizione che la velocità rispettiva del fluido dietro al corpo fosse $(\sqrt{\varepsilon} - \frac{1}{8} u)$ è affatto ipotetico che le pressioni debbano essere $(\sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{8} u)^2$, $(\sqrt{\varepsilon} - \frac{1}{8} u)^2$, e non più tosto $(\varepsilon + \frac{1}{64} u^2)$, $(\varepsilon - \frac{1}{64} u^2)$.

4. Questa considerazione non isfuggì nè meno al sig. Juan, nè adottò le prime formole a preferenza dell'altre, se non perchè quelle porgono, diss'egli *(a)*, una resistenza più conforme al vero, che le seconde. Vedremo fra poco quanto si possa contare sopra questa pretesa corrispondenza. Intanto rifletteremo, che quando non fosse prima di tutto ben dimostrato, o dalla teoria, o dalla sperienza che le pressioni vogliono essere quali vengono supposte da Juan, debba tenersi per dubbia la formola della resistenza da esse pressioni dedotta.

5. Mentre io andava investigando come potevasi decidere della verità, o falsità delle suddette espressioni, conobbi che a tal uopo dovevano essere opportunissime le belle, e ingegnose sperienze instituite, e dirette ad altro scopo dal cel. sig. cavaliere Dubuat *(b)*.

Egli fece correre orizzontalmente, e con differenti velocità uniformi, e ad angolo retto con la direzione del proprio moto un parallelepipedo di un piede quadrato di superficie, e di quattro linee di grossezza; era immerso nell'acqua tranquilla di un grande canale, e il di lui centro di grandezza trovavasi 15 pollici sotto il livello dell'acqua. Col mezzo di convenienti artificj cercò la pressione del fluido sopra una porzione della superficie anteriore, e posteriore del parallelepipedo. Essa era nel mezzo delle due superficie, di figura circolare, e di una linea di diametro. Le velocità colle quali Dubuat fece muovere il parallelepipe-

(a) Opera citata. § 644.

(b) Principes d'Hydraulique ec. par M. le chevalier Dubuat. Nouvelle édition. Tom. sec. Par. 3. Sec. 1. Chap. V.

do, e le pressioni corrispondenti che ottenne sono esposte nelle due seguenti tavole.

Tavola delle pressioni anteriori

Velocità	Altezze dovute alle velocità	Altezze sperimentali delle pressioni
poll.	line.	line.
34 , 32	19 , 52	201
34 , 40	19 , 81	202
36 , 36	21 , 91	204
37 , 43	23 , 22	205
48 , 72	39 , 34	222
51 , 00	43 , 11	225
54 , 00	48 , 29	230
54 , 90	50 , 00	232

Tavola delle pressioni posteriori

Velocità	Altezze dovute alle velocità	Altezze sperimentali delle pressioni
poll.	line.	line.
33 , 52	18 , 62	171 , 00
34 , 32	19 , 52	170 , 95
44 , 11	32 , 24	163 , 95
54 , 90	50 , 00	151 , 00
55 , 89	51 , 77	150 , 00

E' manifesto che se le formole delle pressioni adottate da Juan sono vere, esse dovrebbero porgere per le pressioni incontrate dalle due porzioni anteriore, e posteriore del parallelepipedo in ciascuno dei sopra descritti sperimenti risultati perfettamente o prossimamente conformi a quelli degli sperimenti medesimi. Instituito colle formole di Juan il calcolo delle suddette pressioni, e confrontate con quelle degli sperimenti ritrovai le differenze notate nelle seguenti tavole.

Differenze tra le pressioni anteriori dello sperimento e della formola $(\sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{8}u)^2$

Pressioni dello sperimento	Pressioni della formola	Differenze
lin.	lin.	lin.
201	197 , 00	4 , 00
202	197 , 00	5 , 00
204	198 , 34	5 , 66
205	198 , 80	6 , 20
222	204 , 25	17 , 75
225	205 , 20	19 , 80
230	206 , 63	23 , 37
232	206 , 88	25 , 12

Differenze tra le pressioni posteriori dello sperimento e della formola $(\sqrt{\varepsilon} - \frac{1}{8}u)^2$

Pressioni dello sperimento	Pressioni della formola	Differenze
lin.	lin.	lin.
171 , 00	168 , 18	2 , 82
170 , 95	168 , 8	2 , 87
163 , 95	164 , 15	— 0 , 20
151 , 00	159 , 16	— 8 , 16
150 , 00	158 , 96	— 8 , 90

Una si grande disparità tra le vere pressioni, e quelle delle formole di Juan deve convincerci ch' esse non sono soltanto ipotetiche, siccome pensa l' illustre geometra, ma false del tutto, e incapaci per conseguenza di porgere una espressione della resistenza non soggetta a gravi difficoltà, e a grandissimi errori.

6. Per ciò che risguarda gli sperimenti, che secondo Juan confermano pienamente la formola della resistenza dedotta dalle sopra dette pressioni, essi riduconsi tutti ai cinque seguenti.

1°. Esposto un piano rettangolare perpendicolarmente all' azione di due correnti d' acqua di differenti velocità, e immerso a differenti altezze trovò gli urti sostenuti dal piano medesimo prossimamente uguali agli urti calcolati con la sua formola.

2°. Una tavola rettangolare di una lunghezza quadrupla della larghezza, immersa in una corrente d' acqua col suo lato maggiore verticale sostenne un urto doppio all' incirca di quello che rinvenne quando la tavola fu immersa collo stesso lato orizzontale; il che dimostrerebbe, che gli urti erano come le radici quadrate delle altezze, o profondità alle quali la tavola trovavasi sotto il pelo delle correnti.
3°. Il sig. Juan ritrovò la velocità delle navi calcolata con la sua formola conforme a quella osservata.
4°. La forza colla quale per la teoria di Juan l' acqua corrente dovrebbe agire sopra le ruote di alcune macchine idrauliche, come sarebbero quelle de' mulini ec. corrisponde ai risultati di 27 sperienze fatte da M. J. Smeaton con una macchina di sua invenzione per determinare la suddetta forza dell' acqua.
5°. La teoria de' Cervi-volanti dedotta dalla sua formola sembra al summentovato geometra, che corrisponda ai fenomeni, ed agli effetti che si osservano nel movimento di questa macchinetta.

7. Sopra tali sperimenti conviene prima di tutto che si rifletta 1°. che il 1°, 2°, e 4°, risguardano l' urto, non già la resistenza dei fluidi; 2°. che il 3° spetta alla resistenza nella supposizione che il solido sia in parte non tutto immerso nel fluido. Ora io dico che nessuno di essi può provare l' aggiustatezza della formola di Juan relativa al caso che da noi si esamina presentemente, che è quello che il corpo sia indefinitamente immerso nel fluido tranquillo. Imperciocchè essa formola potrebb' essere intieramente falsa riferita al caso suddetto in quanto che allora non debba conte-

nere funzione alcuna dell'altezza del fluido, come dimostreremo fra poco, e vera o almeno non falsa del tutto riferita al caso o dell'urto d'una corrente d'acqua, o della non totale immersione del solido, in quanto che in ciascuno di questi casi la formola debba contenere la radice quadrata dell' altezza del fluido, od un' altra funzione di essa altezza tale da porgere un risultato prossimamente conforme alla sperienza, siccome verrà dimostrato quando parlerò di quella parte della teoria di Juan che risguarda i due casi sopraccennati.

Non rimarrebbe adunque se non il 5°. sperimento che propriamente potrebbe considerarsi come spettante al caso del solido moventesi tutto immerso in un fluido tranquillo, e indefinito, s'egli supponesse il cervo muoversi per l'aria quieta; ma nel suo calcolo suppone invece in quiete il cervo, e che il vento lo sostenga ad una data altezza. Inoltre trattandosi dell'aria atmosferica, ancorchè la formola della resistenza dovesse contenere la radice quadrata dell' altezza del fluido, questa radice non potrebbe trovarsi nella formola della resistenza opposta dall'aria al cervo volante, imperciocchè la differenza tra l'altezza della colonna atmosferica corrispondente ad un punto inferiore della superficie del cervo, e quella di un punto superiore sarebbe del tutto trascurabile a cagione dell' estrema sua picciolezza. In fatti neppure Juan cita questo sperimento come comprovante la parte della formola, che risguarda la radice dell'altezza, ma soltanto come comprovante che la resistenza deve considerarsi come la semplice velocità.

Dal fin qui detto parmi che si possa con tutta sicurezza raccogliere, che nessuno degli sperimenti citati da Juan a prova della sua ipotesi è valevole a decidere s' essa sia vera, o falsa nel caso che si esamina presentemente, il quale è pure la base di tutta intiera la sua teoria.

8. Persuaso di questa rilevantissima conseguenza andai meco stesso esaminando quali esser potessero gli sperimenti capaci veramente di soddisfare ad un oggetto di si grande importanza. E primieramente osservai, che uno dei mezzi necessarii a tal' uopo sarebbe di muovere con la stessa forza un solido attraverso del fluido per due spazj uguali ma uno lontano, l' altro vicino alla superficie di esso fluido, e misurare i tempi impiegati dal solido a percorrerli. Se, come pensa Juan, la resistenza deve essere, in parità di circostanze, come la radice quadrata dell' altezza del fluido, è manifesto che la resistenza incontrata dal solido nel percorrere lo spazio lontano deve esser maggiore di quella incontrata scorrendo lo spazio vicino, e perciò anche il tempo scorso nel primo caso deve esser maggiore del tempo scorso nel secondo, e maggiore di quanto lo esige l'eccesso della resistenza corrispondente all'eccesso delle radici delle altezze.

9. Considerai in secondo luogo che per potere con tal mezzo decidere deffinitivamente della parte della teoria di Juan relativa al caso da noi contemplato, conveniva assolutamente adempire con precisione alle tre seguenti condizioni. 1ª. che il fluido fosse incompressibile, indefinito, quieto, e che il moto in esso eccitato da quello del solido non giugnesse al li-

vello del fluido. 2ª. che se tra i tempi spesi dal solido a percorrere i due uguali spazj si trovasse differenza, questa non si potesse in alcun modo attribuire se non alla differenza di resistenza. 3ª. finalmente che neppure la differenza di resistenza potesse essere cagionata se non dalla differenza delle altezze del fluido.

10. A rendere più facile il confronto dei risultati ch' io fossi per ottenere, degli sperimenti instituiti con questo metodo, e con tali avvertenze, con quelli della formola di Juan ho dovuto preferire a qualunque altro solido una lamina sottile, e inflessibile, e alle differenti situazioni degli spazj la verticale, e farli inoltre percorrere dalla lamina muovendola all' insù colla sua superficie sempre orizzontale. Il fluido che feci attraversar dalla lamina era l' acqua di un pozzo (fig. 7ª. della tavola annessa alla memoria 2ª. *Nuove ricerche ec.*), in cui l' acqua suddetta giugneva fino all'altezza di sedici piedi.

11. Per dare alla lamina il prescritto movimento feci uso dell' ingegnoso, e semplice artificio immaginato per un oggetto di cui parleremo fra poco, dal cel. matematico il sig. cav. Vittorio Fossombroni, attaccando la lamina o pei quattro suoi angoli a quattro cordoncini che si univano ad una corda, che accavalciava due mobilissime rotelle r, r, e che all' altra estremità portava un peso p. Discendendo il peso per la sua naturale gravità, la lamina saliva per la linea verticale $o\,r$.

12. Ciascuno dei due spazj, che mediante questo artificio feci percorrere alla lamina era di due piedi,

l' uno distante colla sua estremità superiore 13 piedi dalla superficie dell' acqua, l' altro di 4, così che l'altezza media della colonna del fluido sopraincombente alla lamina quando percorreva lo spazio lontano era di 14 piedi, e l' altezza media della colonna sopraincombente alla lamina percorrendo lo spazio vicino era soltanto di 5 piedi. Donde rilevasi che se veramente il peso, o l' altezza del fluido avesse qualche influenza sopra la resistenza, siccome crede Juan, la differenza di 9 piedi tra le altezze del fluido dovrebbe produrne una sensibile anche tra le resistenze incontrate dalla lamina nel percorrere i due spazj uguali.

Per far percorrere alla lamina il 1°. spazio cioè il più lontano allungai la corda fintanto che la lamina si trovasse distante dalla superficie del fluido di 15 piedi, e il peso motore lontano dal suolo di due piedi. Indi si lasciava cadere il peso suddetto da quell'altezza; così mentre esso percorreva i due piedi discendendo, altrettanti ne percorreva la lamina salendo. Del pari per far percorrere ad essa il secondo spazio, vale a dire il più vicino, si accorciava la corda sino a tanto che la lamina si trovasse distante dalla superficie del fluido di 6 piedi, e di due piedi il peso motore dal pavimento, indi come sopra si lasciava cadere dalla quiete.

13. Essendo dimostrato che l' acqua può considerarsi come un fluido, almeno fisicamente, incompressibile, per essere ugualmente sicuro ch' esso fosse anche perfettamente quieto, lasciai tra una corsa, e l'altra della lamina passare tutto il tempo richiesto all'annientamento dell' intero moto, che per quello della lamina doveva nascere nel fluido.

14. Così per accertarmi, che il volume dell'acqua si potesse supporre indefinito, considerai che dovea bastare l' essere sicuro che mentre la lamina percorreva ognuno dei due spazj, il moto da essa comunicato all' acqua non giungesse nè al fondo, nè alle pareti del pozzo. Del che venni assicurato dall'osservare, che movendo la stessa lamina per l' acqua che riempiva tutto un recipiente della larghezza del pozzo, ed alto quattro piedi, non comunicavasi il più picciolo movimento ad alcuni corpicciuoli posti in fondo, ed appesi col mezzo di lunghi fili alle pareti del recipiente.

15. Finalmente la più accurata, e più volte ripetuta osservazione sopra quanto accadeva alla superficie dell' acqua del pozzo qualora moveasi la lamina per l' uno, e per l' altro dei due spazj, mi persuase, che ad essa superficie non giungeva il menomo movimento.

16. Per soddisfare alla seconda essenziale condizione, cioè per assicurarmi che se tra i tempi spesi dalla lamina a percorrere i due spazj si fossero trovate differenze, queste non si potessero attribuire se non alle differenze di resistenza, feci riflesso, che rimanendo lo stesso peso motore per tutti due gli spazj, tutte le cagioni estranee alla resistenza si debbono restrignere all' accelerazione del peso motore cadendo dalla quiete, ed alla estensibilità della corda; per le quali cagioni i due spazj che il peso motore percorre in corrispondenza ai due che percorre la lamina, non potessero per avventura esser trascorsi con moti simili, ed uguali. Quanto alla prima, non si potrà al certo temere che il peso motore cadendo dalla quiete, ed essendo lo stesso per tutti due gli spazj, non debba anche

e per l' uno, e per l' altro accelerarsi ugualmente, e similmente. Onde evitar poi la menoma alterazione, che in cotal moto potesse indurre la estensibilità della corda, in luogo di un cordone di seta, o d' altra simile materia di cui si avrebbe potuto far uso, adoperai un filo di ottone bene stirato, e disteso prima di assoggettarlo alla sperienza.

17. Finalmente per ciò che spetta alla terza condizione, si osserverà, che le cagioni differenti dalle varie altezze del fluido che potrebbero alterare le resistenze incontrate dalla lamina nel percorrere i due spazj, devono assolutamente restrignersi alle seguenti.

1ª. Il moto comunicato dalla lamina all'acqua, supposto ch' esso giungesse alla di lei superficie, o al fondo, o alle pareti del pozzo.

In fatti arrivando fino alla superficie è manifesto nascerebbe in essa un' intumescenza. e quindi dietro alla lamina un vacuo. Egli è inoltre evidente, che il supposto moto, propagantesi fino alla superficie, dovrebbe esser maggiore a misura che la lamina si accosta, salendo, alla superficie medesima, e quindi maggiore il vacuo che si produrrebbe quando la lamina percorre lo spazio più vicino. Ciò posto non si potrà al certo da nessun dubitare che, per cagione del vacuo, non debba aumentarsi la resistenza, ed esser quindi maggiore per questa causa quando la lamina percorre lo spazio meno lontano dalla superficie.

Supposto poi che il suddetto movimento giungesse al fondo del recipiente d'acqua, si comprenderà che allora il movimento col quale il fluido fuggirebbe dalla superiore alla parte inferiore della lamina, non sa-

rebbe più uguale, nè simile al moto che per questo passaggio concepirebbe quando il fondo non gli opponesse il menomo ostacolo, e che sarebbe quando la lamina percorre lo spazio da esso fondo più lontano. Ciò posto se la resistenza, siccome altrove ho diffusamente dimostrato *(a)*, dipende essenzialmente da questo movimento, non s' incontrerà difficoltà alcuna a concepire ch' essa resistenza deve cambiarsi variando un tal moto, e quindi non essere uguale in ciascuno dei due uguali spazj percorsi dalla lamina.

Con lo stesso ragionamento si conoscerà che una simile ineguaglianza di resistenze dovrebbe pur nascere quando il moto dell' acqua giungendo alle pareti non vi pervenisse in una maniera uguale, e simile per tutti due gli spazj.

2ª. L'altra cagione sarebbe l' attrito dei perni delle rotelle, quello della corda sopra le rotelle medesime, e l' ostacolo opposto dall' aria al peso cadente. E' manifesto, che qualora la somma di tali resistenze non fosse uguale per tutti due gli spazj, per esse, e non già per le differenti altezze del fluido dovrebbe la lamina percorrere i due uguali spazj in tempi ineguali.

3ª. La tenacità, e lo sfregamento del fluido sopra la parte immersa della corda. Si vede manifestamente, che queste due forze, o resistenze devono esser maggiori per lo spazio più vicino al fondo, poichè per questo spazio la lunghezza media del cordone è di 12 piedi, e quella per lo spazio vicino di soli tre piedi.

4ª. Finalmente il peso della quantità d' acqua che il

(a) Nuove ricerche cc. Mem. 1. §§ 48, 50, cc.

filo uscendo da essa deve, per la nota coerenza o tenacità, trasportar seco.

18. Ciò premesso relativamente alla prima delle sopra indicate cagioni, da ciò che si è detto ai §§ 14, 15, apparirà visibilmente ch' essa non poteva alterare per niente la resistenza che fosse per nascere dall' altezza del fluido, poichè il moto in esso eccitato dalla lamina non giungeva nè alla superficie dell' acqua, nè al fondo, o alle pareti del pozzo.

Quanto alla seconda, essendo l'attrito come la pressione, e come l' area della superficie sfregante, non si troverà certamente ragione alcuna per cui esso non dovesse esser uguale per tutte due le corse della lamina. Così pure uguale la resistenza dell'aria a motivo della stessa area urtante, della uguale sua velocità e della densità uniforme dell' aria.

A togliere poi l'influenza, che al certo dovea avere l' attrito, e la tenacità dell' acqua con la porzione immersa del filo, prima di far percorrere alla lamina lo spazio vicino attaccai ad un uncino fissato nel mezzo della superficie inferiore della lamina un filo diritto parimente di ottone, e della grossezza di quello cui era appesa la lamina medesima. Per tal modo il filo scorrente pel fluido divenendo uguale per tutti e due gli spazj, avrà dovuto incontrare pur anche uguali resistenze.

Finalmente per ciò che spetta alla quarta ed ultima forza perturbatrice, oltrechè la quantità d' acqua estratta dal filo doveva essere picciola, s' ebbe anche l' avvertenza di sminuirla ancor più ungendo il filo; ed è poi evidente ch' essa doveva essere uguale in tutti

due gli spazj, o differire d'una quantità affatto disprezzabile.

19. Assicurato dal fin quì detto che, se si fosse trovata differenza nelle resistenze, essa dovevasi attribuire alla sola differenza dell' altezza del fluido, mi rivolsi a investigare come potevasi misurare esattamente i tempi. Tutta la difficoltà riducendosi al computo preciso delle minime frazioni di secondo, cercai di evitarle almeno nel calcolo del primo tempo, lasciando cadere il peso nell' istante precisamente, che un buon pendolo a secondi batteva un secondo, poscia osservando se il peso finiva di percorrere i due piedi nel momento stesso che il pendolo avesse battuto un altro secondo. Se ciò non succedeva si levava, o aggiungevasi al peso motore dell' altro peso sino a tanto che si ottenesse per la misura di tutto il tempo un numero intiero, e perfetto di secondi. Per conoscere poi se l' altro spazio venisse percorso in uguale, o in un tempo maggiore o minore del primo, ritenendo lo stesso peso, e lasciandolo cadere parimente dalla quiete mentre il pendolo batteva un secondo, ritrovai ch' esso finiva di percorrere anche questo spazio in un numero intero di secondi, e uguale perfettamente al primo.

20. Ciascuno di questi tempi fu di 3″. Diminuendo il peso motore, sicchè uno dei due spazj fosse percorso in 5″, poscia in 8″, indi in 10″, e finalmente in 15″, trovai che anche l' altro spazio veniva percorso con uguale precisione in 5″, 8″, 10″, 15″.

In ogn' uno di questi sperimenti feci uso di tre lamine quadrate delle quali la prima aveva un'area di 425 pollici, la seconda di 182, e la terza di 54. E o-

gni sperimento fu ripetuto sino alle sedici, e venti volte.

21. Ma prima di dedurre da questa incontrastabile uguaglianza de'tempi, quella delle resistenze incontrate dalla lamina nel percorrere i due spazj, e da ciò la falsità della ipotesi di Juan fa d'uopo assolutamente che si esamini con la massima accuratezza se sia indubitatamente vero siccome è d'avviso il sig. Fossombroni, che quanto più grande fosse l'altezza del fluido che sovrasta al solido, altrettanto più facilmente dovesse il fluido passare dall'anterior parte del solido alla posteriore e perciò opporre ad esso solido minor resistenza *(a)*. Se ciò accadesse in realtà, io dico che l'uguaglianza delle due resistenze rinvenuta coi nostri sperimenti ben lontana dal dimostrare l'erroneità della teoria di Juan ne diverrebbe anzi una favorevolissima prova. In fatti suppongasi per un poco, che non sia altrimenti vero che la resistenza debba crescere come vuole Juan in ragione della radice dell'altezza del fluido, e che per l'opposto sia certo ch' essa debba, come crede il sig. Fossombroni sminuirsi in qualche proporzione dell'altezza suddetta, è indubitato che la lamina avrebbe dovuto incontrare minor resistenza nel percorrere lo spazio più lontano dalla superficie dell'acqua che il più vicino. Ma queste resistenze si trovano uguali, egli è dunque certo, che oltre la cagione che, secondo Fossombroni, deve aumentare la resistenza ve ne debba essere un' altra che nelle stesse circostanze, e contemporaneamente la sminuisca. Or chi non

(a) Veggasi la memoria di questo illustre matematico *sull' urto e resistenza de' fluidi* inserita nel tomo 9 della Società Italiana delle scienze.

vede, che questa cagione potrebb'essere quella per cui nella formola di Juan viene introdotta la radice dell'altezza del fluido?

22. Le prove addotte dal sig. Fossombroni in favore della sua tesi sono i risultati d'ingegnosi sperimenti ch'egli stesso fece a tal uopo, e di alcuni altri analoghi instituiti, ma non a quest'oggetto, dal sig. cav. de Borda.

Il geometra italiano coll'artificio accennato al § 11 fece muovere verticalmente una sottile, e rigida lamina di ferro larga un braccio quadro fiorentino, e situata orizzontalmente nell'acqua. Lasciato cadere il peso motore, e giunta la lamina ad una sensibile equabilità misurò il tempo speso dalla lamina salendo per spazj uguali.

Il geometra francese fece scorrere una sfera di 59 linee di diametro orizzontalmente dentro l'acqua osservando con un pendolo a mezzi secondi in quanto tempo la sfera animata dal medesimo peso motore e immersa prima alla profondità di 6 pollici, poi di due linee sotto la superficie dell'acqua terminava di percorrere due spazj uguali. Dalle sperienze dell'uno, e dell'altro risulta che i tempi spesi dai solidi a percorrere gli spazj più vicini alla superficie dell'acqua furono un poco maggiori dei tempi spesi a percorrere gli spazj più lontani, e da ciò il sig. Fossombroni argomenta, che anche le resistenze incontrate nel primo caso dovevano esser maggiori di quelle incontrate nel secondo, e ciò perchè il fluido avesse maggiore difficoltà in quello, che in questo caso a passare dall'anteriore alla posterior parte della lamina.

23. Non potend'io in alcun modo dubitare dell'esattezza de' miei sperimenti, temerei che qualcuna delle cagioni notate ai §§ 16, 17, affatto differente dalla supposta, fosse concorsa a produrre nelle sperienze dei summentovati matematici l'indicato aumento de' tempi. In fatti per ciò che risguarda gli sperimenti del sig. Borda, se anche non si volesse accordare che il moto eccitato nell' acqua dalla sfera quand'era immersa sei pollici giungesse fino alla superficie, si dovrà convenire al certo che vi giungesse quand' era immersa due sole linee, e che perciò dovesse (§ 17) nascere un vacuo, e per questo vacuo, non già per la maggiore difficoltà del passaggio del fluido, aumentarsi la resistenza.

24. Nulladimeno, qualora fosse vera la ipotesi di Juan, malgrado anche l' uguaglianza de' tempi, e quindi delle resistenze incontrate dalla lamina a percorrere gli spazj lontani, e vicini alla superficie dell'acqua, potrebbe ancora esser vero che il fluido avesse maggiore difficoltà a fuggire dietro alla lamina per gli spazj più vicini. Imperciocchè, come si notò al § 21, le due resistenze una in più l'altra in meno, che allora dovrebbero aver luogo, potrebbero bilanciarsi.

25. Da ciò segue di legittima conseguenza che per dimostrare se regga o nò il principio immaginato dal sig. Fossombroni è assolutamente necessario ricorrere ad un genere di prove del tutto differenti dalle adottate da questo illustre geometra.

26. Io mi feci quindi a considerare, che, se il fluido trova maggiore difficoltà a passare dalla parte anteriore alla posteriore della lamina quand' essa percorre lo spazio vicino, di quella che incontra quando

trascorre il lontano, anche la velocità con la quale il fluido medesimo scapperà dietro alla lamina dovrà essere necessariamente minore nel primo caso, che nel secondo; e che quindi, per decidere la questione, convenga dimostrare se nelle suddette velocità vi possa essere, e vi sia realmente una tale differenza.

27. Al § 48 della mia prima memoria: *nuove ricerche ec.* ho provato teoricamente, che quando il fluido è indefinito, incompressibile, e che il moto in esso eccitato da quello del solido non giunge sino alla superficie, che è appunto il caso, del quale ora si parla, il peso del fluido sopraincombente non ha influenza alcuna sul movimento che concepisce nel suo passaggio alla parte posteriore del solido; e ch' esso movimento è quale sarebbe precisamente, se il fluido non fosse pesante.

Nulladimeno trattandosi di un punto di tanta importanza ho creduto di ricorrere ad uno sperimento, che, s' io non m' inganno, mi sembra decisivo.

28. Immaginiamo una lamina orizzontale rotonda ben liscia, e inflessibile, la quale porti un filo di ottone parimente inflessibile e fissato normalmente nella superficie superiore di essa lamina a qualche distanza dal di lei centro, e che dall' estremità di questo filo penda un sottilissimo filo di seta portante una rotonda palla di cera resa di pochissimo maggior gravità dell' acqua. E' manifesto, che movendo la lamina su per l' acqua tranquilla il moto col quale il fluido scapperà dalla parte superiore alla inferiore della lamina spignerà la palla verso la circonferenza della lamina stessa, e a tanta maggiore distanza quanto maggiore

sarà il moto o velocità del fluido suddetto. E' del pari evidente, che se l'altezza, o pressione del fluido che sovrasta alla lamina influisce sulla velocità colla quale esso passa dietro al solido moventesi per due spazj uguali uno lontano l'altro vicino alla superficie dell'acqua, e con uguale velocità; le deviazioni della palla non potranno essere uguali.

Per muovere la lamina pei due spazj uguali mi servii dell' artificio descritto al § 12. Ciascuno dei due spazj era di 6 pollici, uno distante tre piedi dalla superficie dell' acqua, l' altro d' un solo piede.

Per determinare le deviazioni del pendolo tracciai sopra la lamina degli archi di cerchi concentrici, osservando con la più scrupolosa attenzione a quale dei suddetti archi giungeva la palla in ciascuno dei due spazj che si facevano percorrere alla lamina.

Instituiti questi sperimenti con tutte le avvertenze notate ai §§ 13, 14, 15 trovai che le deviazioni del pendolo furono perfettamente uguali in tutti due gli spazj.

Avendo ottenuto gli stessi risultati quando feci muovere la lamina con maggiore velocità, il che si conseguiva aumentando il peso motore, io credo potersi tenere per indubitato, che l'altezza del fluido non ha alcuna influenza sopra la velocità colla quale fugge dietro al solido, e che perciò debba passarvi con uguale facilità così quando il solido è vicino, come quando è lontano dalla superficie del fluido.

29. Per ciò che si disse al § 21 saremo adunque sicuri che l' uguaglianza delle resistenze incontrate nei nostri sperimenti dalla lamina quando moveasi e lontana, e vicina alla superficie dell' acqua deve provare

invincibilmente, che la resistenza del fluido non solo non è proporzionale alla radice della di lui altezza, come suppone Juan, ma neppure a nessun' altra funzione dell' altezza medesima.

In conferma di questa importantissima conseguenza passeremo ora a vedere ch'essa si accorda perfettamente coi principj d'una più esatta, e sicura teoria.

30. Al § 48 della 1ª. memoria *nuove ricerche ec.* ho provato che, supposto $l' n'$ (fig. 5ª. tav. 1 annessa alla suddetta memoria) il profilo d'una lamina rettangolare tutta immersa nel fluido $S T T' S'$, e movente-si uniformemente, e con la superficie sempre normale alla linea orizzontale $o y$, il fluido, che necessariamente dovrà passare alla parte posteriore della lamina per cedere ad essa il sito, che progressivamente va occupando nel progredire per $o y$, si muoverà per le linee $\gamma \alpha n' \pi \upsilon$, $\gamma \alpha' l' \pi' \upsilon'$; 152'3, 15'2'3', ec. lasciando i due spazj $\gamma \alpha' \alpha$, $\gamma' 66'$ ripieni di fluido, che si muoverà per linee rette, e nella direzione del moto della lamina.

31. Ora si osserverà 1°. che ogni particella del fluido contiguo alla porzione $\alpha \alpha'$ della superficie anteriore $l' \alpha' o \alpha n'$ avrà due *velocità virtuali*, o di tendenza a muoversi contro la superficie suddetta, e in direzioni ad essa normali, delle quali velocità la prima sarà dovuta al peso della colonna del fluido sopraincombente ad essa particella, e la seconda sarà prodotta dall' azione, colla quale il fluido anteriore reagirà sopra la particella medesima spinta contro esso fluido dal movimento della lamina. 2°. che ogni particella del fluido contiguo all'altre porzioni $\alpha' l'$, $\alpha n'$ oltre le

due suddette velocità virtuali ne avrà una reale colla quale esso fluido si muoverà effettivamente da α' verso l', e da α verso n'. 3°. che, supposto, come al § 2, $\mu\, d\varepsilon$ un differenzio-differenziale della porzione $\alpha\alpha'$, ed ε l'altezza del fluido sopra $\mu\, d\varepsilon$, h l'altezza dovuta alla velocità della lamina, per la velocità di tendenza prodotta dal peso del fluido la particella contigua ad $\mu\, d\varepsilon$ eserciterà una pressione sopra esso $\mu\, d\varepsilon$ proporzionale ad $\mu\, d\varepsilon\,.\,\varepsilon$, e per la velocità di tendenza prodotta dalla reazione del fluido anteriore eserciterà parimente sopra $\mu\, d\varepsilon$ una pressione proporzionale ad $\mu\, d\varepsilon\,.\,h$; così che la pressione sopra tutta la $\alpha\alpha'$ sarà la somma delle suddette due pressioni, cioè

$$\int \mu\, d\varepsilon\,.\,\varepsilon + \int \mu\, d\varepsilon\,.\,h = \int \mu\, d\varepsilon\,(\varepsilon + h).$$

4°. che chiamata z l'altezza del fluido sopra un elemento $\mu\, dz$ di $\alpha\, n'$ e z' quella del fluido sopra un elemento $\mu\, dz'$ di $l'\, e'$; y, y' le altezze dovute alle velocità parallele ad $l'\,\alpha'$, $\alpha\, n'$ delle particelle al contatto di $\mu\, dz$, $\mu'\, dz'$, per la nota teoria delle pressioni de' fluidi in movimento si avrà

$\mu\, dz\,(z + h) - \mu\, dz\,.\,y$ per la pressione del fluido sopra $\mu\, dz$, e perciò

$\int \mu\, dz\,(z + h - y)$ per la pressione sopra tutta la $\alpha\, n'$. Si avrà parimente

$\mu\, dz'\,(z' + h) - \mu\, dz'\,.\,y'$ la pressione del fluido sopra $\mu\, dz'$, e quindi

$\int \mu\, dz'\,(z' + h - y')$ per la pressione sopra tutta la $l'\,\alpha'$. Dal che risulta che la pressione sopra tutta la $l'\, n'$ sarà

$\int \mu\, d\varepsilon\, (\varepsilon + h) + \int \mu\, dz\, (z + h - y) + \int \mu\, dz'\, (z' + h - y')$.

32. Passiamo a investigare la pressione contro la superficie posteriore $l'\,6\,6'\,n'$ della lamina. Ogni particella del fluido contiguo alla porzione $6\,6'$ avrà pure due velocità virtuali, ossia di tendenza contro $6\,6'$, delle quali una sarà dovuta all' altezza del fluido sopraincombente (§ 28), l' altra all' altezza α (§ 3), di modo che, (§ 28) se la lamina fosse in quiete, un elemento qualunque $\mu\, d\varepsilon'$ distante di ε' dal livello del fluido soffrirebbe a cagione della prima velocità una pressione proporzionale ad $\mu\, d\varepsilon' . \varepsilon'$, e per la seconda velocità altra pressione soffrirebbe proporzionale ad $\mu\, d\varepsilon . \alpha$, e per tutte e due le velocità la pressione uguale ad

$$\mu\, d\varepsilon' . \varepsilon' + \mu\, d\varepsilon' . \alpha = \mu\, d\varepsilon' (\varepsilon' + \alpha) .$$

Ma la lamina si muove con la velocità dovuta all' altezza h nella direzione di questa pressione $\mu\, d\varepsilon' (\varepsilon' + \alpha)$, egli sarà quindi manifesto che $\mu\, d\varepsilon' (\varepsilon' + \alpha)$ sarà diminuita di tutta la $\mu\, d\varepsilon' . h$, così che la pressione effettiva sostenuta da $\mu\, d\varepsilon'$ sarà $\mu\, d\varepsilon' (\varepsilon' + \alpha) - \mu\, d\varepsilon' . h = \mu\, d\varepsilon' (\varepsilon' + \alpha - h)$ e $\int \mu\, d\varepsilon' (\varepsilon' + \alpha - h)$ la pressione sopra tutta la $6\,6'$.

In oltre ogni particella del fluido contiguo all'altre porzioni $6'\,l'$, $6\,n'$ oltre le due suddette velocità di tendenza ha una velocità reale, colla quale si muove da $6'$ verso l', e da 6 verso n' parallelamente a $6'\,l'$, $6\,n'$; perciò chiamata Φ l' altezza del fluido sopra un elemento $\nu\, d\Phi$ di $6\,n'$, τ l' altezza dovuta alla velocità effettiva della particella al contatto di $\mu\, d\Phi$, la pressione sopra $\nu\, d\Phi$ sarà

$\mu\, d\,\varphi\,(\varphi + \alpha - h) - \mu\, d\,\varphi\,.\,\tau = \mu\, d\,\varphi\,(\varphi + \alpha - h - \tau)$.

Così, chiamata φ' l' altezza del fluido sopra un elemento $\mu\, d\,\varphi'$ di $6'\,l'$, τ' l' altezza dovuta alla velocità effettiva della particella al contatto di $\mu\, d\,\varphi'$, la pressione sopra $\mu\, d\,\varphi'$ sarà

$$\mu\, d\,\varphi'\,(\varphi' + \alpha - h) - \mu\, d\,\varphi'\,.\,\tau' = \mu\, d\,\varphi'\,(\varphi' + \alpha - h - \tau')$$

e per conseguenza

$$\int \mu\, d\,\varepsilon'\,(\varepsilon' + \alpha - h) + \int \mu\, d\,\varphi\,(\varphi + \alpha - h - \tau) + \int \mu\, d\,\varphi'\,(\varphi' + \alpha - h - \tau')$$

la pressione sopra tutta la superficie posteriore $l'\,6'\,6\,n'$.

33. Per rendere più semplici, e perciò integrabili più facilmente le formole delle pressioni anteriore, e posteriore, suppongasi la lamina circolare, e che in luogo di muoversi orizzontalmente si muova verticalmente all' insù sempre colla sua superficie normale alla linea verticale del suo movimento; allora le particelle al contatto della superficie superiore della lamina saranno tutte ugualmente distanti dal livello del fluido, siccome pure lo saranno tutte le particelle al contatto della superficie inferiore; e per la grande sottigliezza della lamina si potrà supporre la distanza delle prime uguale a quella dell'altre. Da ciò, e dalle formole delle pressioni determinate ai §§ 28, 29 si dedurrà evidentemente 1°, che chiamata b l' area $\alpha\,\alpha'$, B quella di $l'\,\alpha'$, $\alpha\,n'$; x l' altezza del fluido, u l'altezza dovuta alla velocità effettiva del fluido distante della quantità z dal centro o della lamina, si avrà $b\,(x + h)$ per la pressione sopra b, ed $B\,(x + h) - \frac{2\,.\,22}{7} \int z\, d\, z\,.\,u$ per la pressione sopra $l'\,\alpha'$, $\alpha\,n'$; sup-

posto $\int z\,dz\,.\,u$ un integrale che svanisca fatto $z = o\,z$, e si completi fatto $z = o\,z + z\,l$. 2°. che chiamata b' l'area $6\,6'$, B' quella di $6'\,l'$, $6\,n'$; u' l'altezza dovuta alla velocità effettiva del fluido distante di z' dal centro o di grandezza della lamina si avrà $b'\,(x + z - h)$ per la pressione sopra $6\,6'$, ed $B'(x + \alpha - h) - \frac{2.22}{7}\int z'\,dz'\,.\,u'$ per la pressione sopra $6'\,l'$, $6\,n'$, supposto anche in questo caso $\int z'\,dz'\,.\,u'$ un integrale, che sia zero fatto $z' = o\,6'$, e si completi fatto $z' = o\,6' + 6'\,l'$.

34. Fin ora si è supposto il fluido senza tenacità. Ogn' un vede che se le particelle del fluido avranno qualche coerenza tra loro, come si osserva nell' acqua e più nell' olio ec. il fluido scorrente per $\gamma\,\alpha'$, $\gamma\,\alpha$; $\gamma'\,6'$, $\gamma'\,6$; e per le altre curve tra $\gamma\,\alpha'$, $1'\,5'$; $\gamma\,z$, $1\,5$; $\gamma'\,6'$, $x'\,3'$; $\gamma\,6'$, $x\,3$, dovrà per la supposta tenacità strascinar seco, e perciò spingere contro la lamina il fluido contenuto negli spazj $\alpha\,\alpha'\,\gamma$, $6\,6'\,\gamma'$, e quindi aumentare un poco la pressione di esso fluido contro $z\,\alpha'$, $6\,6'$; perciò chiamato μ quest' aumento di pressione sopra $\alpha\,\alpha'$, ed μ' quello sopra $6\,6'$, la pressione sopra $\alpha\,\alpha'$ non sarà più $= b\,(x + h)$, ma $= b\,(x + h + \mu)$; e la pressione sopra $6\,6'$ non più $= b'\,(x + \alpha - h)$ ma $= b'\,(x + z + \mu' - h)$.

35. L' importanza delle conseguenze, che si vogliono dedurre dalle due precedenti formole delle pressioni mi fece indagare come si potessero confermare con l' esperienza.

E' manifesto che a tale oggetto era bastante di trovare con le formole le pressioni contro le superficie anteriore e posteriore della lamina, e confrontando le une con le altre, osservare le differenze. Ma quand'anche non fosse difficile la prima ricerca, come rinvenire le suddette pressioni col mezzo delle formole, essendo ignote le $\alpha\alpha'$, $66'$; nè potendosi integrare $\int z\,dz\,.\,u$, $\int z'\,dz\,.\,u'$ non conoscendosi le u, u' in funzioni di z, z'?

Ad evitare queste difficoltà feci riflesso, che al nostro argomento dovea bastare anche il confronto delle sole pressioni sopra picciole porzioni centrali di $\alpha\alpha', 66'$ con quelle rinvenute coll' esperienze di Dubuat descritte al § 5. In fatti qualora fossero vere le formole suddette non può dubitarsi, che non dovessero esserlo anche le altre, essendo queste una legittima, e vera conseguenza di quelle.

Instituiti perciò i calcoli necessarj ottenni i risultati esposti nelle due seguenti tavole.

Confronto delle pressioni dello sperimento con quelle della formola $b(x+h+\mu)$

Pressioni dello sperimento	Pressioni della formola	Differenze delle due press.
lin.	lin.	lin.
201	199 , 52 + μ	1 , 48 − μ
202	199 , 81 + μ	2 , 19 − μ
204	201 , 91 + μ	2 , 9 − μ
205	203 , 22 + μ	1 , 78 − μ
222	219 , 34 + μ	2 , 66 − μ
225	223 , 11 + μ	1 , 89 − μ
230	228 , 29 + μ	1 , 71 − μ
232	230 , 00 + μ	2 , 00 − μ

Dalle cose dette al § 31 si comprenderà, che potendo la pressione μ cagionata dalla tenacità non essere per la sua picciolezza maggiore della pressione di due linee incirca, le differenze notate nella tavola tra le pressioni dello sperimento, e quella formola dovrebbero divenir zero, e in questa supposizione la pressione dello sperimento corrispondere perfettamente a quella della teoria.

Confronto delle pressioni dello sperimento con quelle della formola $b'(x+\alpha'+\mu'-h)$

Pressioni dello sperimento	Pressioni della formola	Differenze delle due press.
lin.	lin.	lin.
171 , 00	$161,38+\alpha'+\mu'$	$9,62-\alpha'-\mu'$
170 , 95	$160,48+\alpha'+\mu'$	$10,47-\alpha'-\mu'$
163 , 95	$147,76+\alpha'+\mu'$	$16,19-\alpha'-\mu'$
151 , 00	$130,00+\alpha'+\mu'$	$21,00-\alpha'-\mu'$
150 , 00	$128,23+\alpha'+\mu'$	$21,77-\alpha'-\mu'$

Intorno a queste differenze fa d' uopo riflettere attentamente, che anche la μ' per la ragione detta di sopra, dovrà esser picciola, ma non così la α'; esprimendo essa (§ 3) l' altezza dovuta alla velocità con la quale il fluido fuggendo dall' anteriore alla posterior parte della lamina dovrà correrle dietro, è visibile che α' dovrà essere una funzione della velocità della lamina,e quindi aumentarsi al crescere di essa velocità, e per conseguenza non essere irragionevole il supporre, che alle altezze poll. poll. poll. poll. poll.
33 , 52; 34 , 32; 44 , 11; 54 , 90; 55 , 89 dovute alle velocità della lamina debbano corrispondere lin.
9 , 62; lin. lin. lin.
10 , 47; 16 , 09; 21 , 77 in circa per le altezze α' dovute alle velocità del fluido; e che perciò debbano es-

ser zero le differenze $9,62^{\text{lin.}} - \alpha' - \mu'$; $10,47^{\text{lin.}} - \alpha' - \mu'$; $16,19^{\text{lin.}} - \alpha' - \mu'$; ec. trovate tra le pressioni dello sperimento, e della formola. Un'altra ragione per cui sembrerebbe che non si avesse a dubitare, che la nostra formola delle pressioni fosse conforme alla pressione dello sperimento è l'osservare che la formola $b(x+h+\mu)$ della pressione anteriore corrisponde precisamente come abbiamo dimostrato di sopra, al risultato dell' esperienza. Ora se corrisponde questa pressione, perchè non dovrà corrispondere anche la posteriore, essendo essa fondata sopra gli stessi principj?

Le sperienze dirette a scoprire la proporzione tra la velocità della lamina, e quella del fluido che le corre dietro, da me intraprese, e che unite all' altre che ho divisato d' instituire su tale importantissimo argomento, assoggetterò in altro tempo al giudizio de' miei illustri colleghi, mi fanno concepire grande lusinga, che la proporzione suddetta sia, come appunto abbiamo di sopra conghietturato.

36. Frattanto conchiuderemo, che se per tutte le ragioni fin ora dette si può ammettere che le pressioni anteriore, e posteriore della lamina sieno espresse da

$$b(x+\mu+h)+B(x+h)-\frac{2\cdot 22}{7}\int z\,dz\,.\,u\,;$$

$$b'(x+\alpha'+\mu'-h)+B'(x+\alpha'-h)-\frac{2\cdot 22}{7}\int z'\,dz'\,.\,u'\;;$$

ne seguirà di legittima conseguenza, che la resistenza della lamina dovendo essere uguale alla differenza delle sopraddette pressioni, sarà espressa da

$$b(x+\mu+h)+B(x+h)-\frac{2\cdot 22}{7}\int z\,dz\,.\,u$$

$$-b'(x+\alpha+\mu'-h)-B'(x+\alpha-h)+\frac{2\cdot 22}{7}\int z'\,dz'\,.\,u'$$

$$=(b+B)(x+\mu+h)-\frac{2\cdot 22}{7}\int z\,dz\,.\,u$$

$$-(b'+B')(x+\alpha+\mu'-h)+\frac{2\cdot 22}{7}\int z'\,dz'\,.\,u'$$

Ma (§ 30) $b+B=l'n'$, $b'+B'=l'n'$, e per ciò $b+B=b'+B'$; supposta A l' area o superficie della lamina, si avrà per la resistenza l' espressione

$$A(x+\mu+h)-\frac{2\cdot 22}{7}\int z\,dz\,.\,u$$

$$-A(x+\alpha+\mu'-h)+\frac{2\cdot 22}{7}\int z'\,dz'\,.\,u'$$

$$=A(\mu-\mu'+2h-\alpha)-\frac{2\cdot 22}{7}\left(\int z\,dz.u+\int z'\,dz'.u'\right).....(a)$$

37. $\int z\,dz\,.\,u$ essendo (§ 32) un integrale che svanisce fatto $z=o\alpha$, e si completa fatto z uguale al raggio r della superficie della lamina, supposta circolare, e così pure $\int z'\,dz'\,.\,u'$ essendo un altro integrale che svanisce fatto $z'=o6'$, e si completa fatto $z'=$ al raggio r della lamina, si vede bene che $\int z\,dz\,.\,u$ sarà una funzione di $o\alpha$, r, ed u; come pure $\int z'\,dz'\,.\,u'$ una funzione di $o6'$, r, ed u', e che quindi la formola (a) della resistenza sarà una funzione di r, α, u, μ', h, u, u', $o\alpha$, $o6'$, la quale formola per conseguenza non conterrebbe funzione alcuna del peso, o altezza del fluido

a meno che non ne contenessero le espressioni, o i valori di v, v'; di α; di u, u'; e finalmente di $o\alpha$, $o6$.

Quanto a μ, μ' dico ch' esse dovranno esser funzioni della tenacità del fluido, e della sua velocità per le curve $\gamma\alpha$, $\gamma\alpha'$; $\gamma'6$, $\gamma'6'$; nè l'espressione della tenacità conterrà funzione alcuna del peso del fluido, essendo già dimostrato dal sig. Coulomb *(a)* che il peso del fluido non ha alcuna influenza sopra la tenacità delle sue particelle, ossia ch' esso peso non aumenta nè sminuisce la forza di tenacità del fluido.

Per ciò che spetta ad α, u, u' è evidente ch' esse saranno funzioni della velocità per le curve $\gamma\alpha$, $\gamma\alpha'$, ec.

Riguardo poi ad $o\alpha$, $o6$ è indubitato, che esse dovranno esser funzioni del raggio r della lamina, e se si vuole anche della sopra detta velocità, e del peso, o altezza del fluido che sovrasta alla lamina. Ma $o\alpha$, $o6$ non potrebbero esser funzioni del peso se non perchè esso dovesse aumentare, o sminuire il movimento, col quale il fluido fugge da o verso l', ch' è quanto dire la velocità per $\gamma\alpha$, $\gamma\alpha'$; $\gamma'6$, $\gamma6'$, per conseguenza le funzioni della velocità, e del peso esprimenti $o\alpha$, $o6$ si ridurrebbero ad una funzione di r, e della sola velocità colla quale il fluido scappa dietro alla lamina.

Ciò premesso si comprenderà agevolmente che la formola (a) della resistenza si ridurrebbe ad una funzione della velocità della lamina, del suo raggio r, e della velocità con la quale il fluido scappa dietro alla

(a) Memorie di fisica, e matematica dell' Istituto Nazionale di Francia. Tom. III.

lamina, di modo che essa formola non potrebbe contenere alcuna funzione dell' altezza del fluido quando quest'altezza non dovesse entrare nella espressione della detta velocità. Ma è già dimostrato dalla teoria e dalla sperienza (§§ 27, 28) che l' altezza, o peso del fluido non ha influenza alcuna sul moto che concepisce passando alla parte posteriore del solido; si dovrà dunque tenere per indubitato ciò che risulta ancora dai nostri sperimenti, che quando il solido è tutto immerso in un fluido tranquillo, indefinito, e incompressibile, e che tra esso ed il solido non nasce vacuo, la formola della resistenza non deve contenere funzione alcuna dell' altezza del fluido.

OSSERVAZIONI STORICHE

sopra l' aritmetica di Francesco Maurolico

Di Mariano Fontana

ricevute il dì 30 di novembre 1807

Le scritture degli eruditi piene sono di querele contro molti moderni autori, che per sue spacciano l' invenzioni de' vecchj. E veramente coloro d' ogni biasimo son degni, che abbattendosi in qualche bella dottrina d' antico scrittore, e credendo o per la rarità del libro, o per la piccola fama dell' inventore, o per qualunque altra lusinga, che s' abbiano, di dovere restarsi occulta la loro frode, se ne attribuiscono il merito, e vogliono essere creduti i primi ritrovatori. Della quale vanità non so se altra sia maggiore. Per altro se da un valent' uomo proporre io vedessi come sua propria qualche teoria, o opinione, o esperimento, o qual siasi tratto d' erudizione, che in più vecchio scrittore avessi trovato o adombrato, o anche dichiarato chiaramente, non perciò accuserei subito il moderno di plagio, potendo leggiermente avvenire, che ne' medesimi pensamenti due ingegni s' incontrino, senza che uno di

questi nulla s' abbia veduto dell' altro. Questo è pur vero in ogni facoltà, ma suole poi essere frequente nelle cose matematiche; e rari credo saranno i coltivatori di questa scienza, che più d'una volta non abbiano creduto d' avere alcuna dottrina scoperto, la quale, senza che il sapessero, già era stata pubblicata da altri.

Mentre adunque ho in animo di mettere in chiaro varie invenzioni di Francesco Maurolico Abate Messinese, che fu de' suoi giorni un rarissimo uomo, nè solamente in tutte le parti delle matematiche versato, e profondo, ma d' ogni maniera d' erudizione ornato, niuno creda ch'io voglia condannare di furto letterario que' celebri uomini, a' quali quelle invenzioni s' attribuiscono; ma pensando io pure, che colla forza del loro ingegno quello abbiano fatto dopo, che Maurolico fece prima col suo, solamente guardo a restituire la gloria d' inventore a chi si viene, cioè a chi prima le nobili dottrine pubblicò. Per ora mi fermo al trattato delle dottrine aritmetiche; opera originale, e per que' tempi maravigliosa. Nel proemio avvisa, che non è già suo pensiere di ripetere quanto fu detto da' geometri greci, o dagli aritmetici a lui vicini; ma solo e' vuole le materie dagli altri intralasciate trattare; e al più recare di varj teoremi aritmetici già dimostrati per altri o più brevi, o più chiare, o più sode dimostrazioni. In due libri chiude il trattato, e ciascun libro si divide in due parti. Dal primo si vede nascere il metodo più universale, che s'abbia l'analisi, cioè la teoria delle serie. Nel secondo s' ammira l' idea proposta, svolta, e applicata dell' aritmetica speciosa.

Qui si conviene considerare il tempo, in cui quest'operetta fu condotta a termine. Si può esso con certezza fissare, poichè nel manoscritto dell' autore, che fu in Venezia dopo molt' anni stampato, cioè del 1575, al fine della seconda parte del secondo libro leggonsi queste parole. " Libri secundi arithmeticorum Mauro- „ lici finis: hora decima octava dici Sabbati, qui fuit „ Julij 24. Cum Messanae cum multo pontis, et arcus „ apparatu expectaretur Io. Cerda Methynensium Dux „ Prorex. Indictione 15 MDLVII. "

Quest' usanza di notare il dì, e fin l' ora, in cui ricevevano compimento le sue opere, quasi sempre Maurolico la mantenne. Così al fine della Cosmografia, così al fine degli opuscoli astronomici; così al fine del suo Archimede; così al fine di molt' altre produzioni. In quel tempo era ancora negli scrigni sepolta l' opera di Diofanto, la quale la prima volta vide la luce in Basilea l'anno 1575 per opera del celebre Guglielmo Xilandro, che la tradusse da un codice, di cui gli fu liberale un coltissimo signore Polacco chiamato Andrea Dudicio Sbardellati. In Italia esisteva un codice nella Vaticana, e l' attesta il Regiomontano, o che l' abbia veduto egli stesso, o che gli sia da altri stato riferito colà ritrovarsi. Il Maurolico certo nol vide, come dal suo prologo apparisce chiaramente, e più ancora da varie dottrine, che nel seguito della sua opera va esponendo, le quali colle scoperte del Greco convengono, ma per via diversissima ritrovate.

PARTE PRIMA

Che contiene l' osservazioni sopra il primo libro.

1. Considera in questo libro il nostro autore le *specie numerarie*. Così gli piace di chiamare alcune serie, che prendono il nome da figure geometriche, le quali possono co' proprj termini rappresentare, solo che bene si dispongano l' unità, onde risultano tali termini. E primieramente espone la forma di queste serie, mostra la loro origine, spiega la natura, e svolge i loro vicendevoli rapporti. In seguito assai importanti conseguenze, e molte nuove dottrine raccoglie, che riguardano i numeri. Pongo sott' occhio nella tavola *A* queste serie, senza che difficilmente s' intenderebbero l' osservazioni, che sopra di esse si faranno.

2. Queste progressioni prendono il nome da figure geometriche, che i loro termini possono rappresentare, solo che l' unità, dalle quali essi risultano, opportunamente si dispongano. Le lineari non sono che progressioni aritmetiche, e per linee rette immediatamente si rappresentano. Le superficiali con triangoli, quadrati, rettangoli, pentagoni, ed esagoni. Eulero negli elementi dell' algebra esprime con triangoli i numeri triangolari, e con quadrati i numeri quadrati. Degli altri numeri poligoni afferma non esser facile la costruzione. Maurolico per mezzo di pentagoni costruisce i numeri pentagoni coll'aggiungere a ciascun quadrato il triangolo antecedente, e cogli esagoni i numeri esagoni aggiugnendo a ciascun numero quadrato

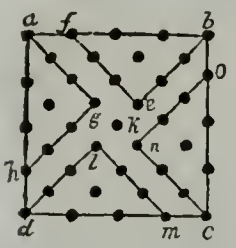
due triangoli antecedenti. I pentagoni però, e gli esagoni, che così risultano, sono equilateri, e non equiangoli. Lo stesso aveva già fatto Giodocco Willichio nella breve sua aritmetica. Il sig. Giovanni Bernoulli Astronomo di Berlino nelle note all' algebra dello stesso Eulero ne dà un elegante metodo di costruire tutti i numeri poligoni con figure non solo equilatere, ma altresì equiangole. Forse perchè Maurolico non vide il modo di riuscirvi si limitò agli esagoni, e non procedette alle serie degli altri poligoni. Per altro poteva egli bene stendersi alle serie degli eptagoni, degli ottagoni e degli altri sin all' infinito; giacchè non ignorava, che tralasciando i rettangolari, i quali volle agli altri superficiali unire, per non ommettere una specie di numeri già da Euclide considerata, i termini di tutte l' altre serie in colonna discendente sono in continova ragione aritmetica.

I numeri piramidali sono dal *N. A.* costruiti con piramidi dello stesso nome, che conviene alle loro basi, le quali non sono, che i già considerati numeri superficiali.

I prismatici poi, o, come l'autore gli chiama, le colonne si costruiscono con prismi, che pure ricevono il nome dalle basi costituite esse pure da' numeri superficiali, avendo per altezza il numero, che esprime il termine nella serie. Così il prisma pentagono quinto ha per base il numero pentagono quinto, cioè 35, e per altezza il numero 5, che è il numero del termine nella serie.

3. Seguono le serie de' numeri centrali. Queste furono all' autore suggerite dalla considerazione, che si

potevano costruire con poligoni resolvibili in triangoli del primo genere, de' quali sopra diede le serie. Ne reco un solo esempio. Il quinto termine de' quadrati centrali è il numero 41. Questo si costruisce coll'unità centrale, che si vede in *k*, e con quattro triangoli primi, ciascuno de' quali sia il termine quarto nella loro serie, cioè l'antecedente al quinto, ed ha per valore il numero 10. Pertanto i quattro triangoli *a g h*, *d l m*, *c n o*, *b e f*, che contengono quaranta unità, coll' unità centrale in *k* costruiscono il numero 41, che è appunto il quinto termine de' quadrati centrali. Lo stesso si dica degli altri poligoni centrali, come ampiamente spiega l'autore.



4. Come da' primi numeri superficiali nascono i solidi primi, così da' piani centrali si formano i solidi secondi, e da' piani stessi ricevono la loro base. In primo luogo ogni piramide risulta dalla base, che è il poligono centrale nello stesso termine, cui appartiene la piramide, che si vuole costruire, e inoltre dagli altri poligoni, che sono i termini antecedenti della medesima serie, fino che s'arrivi all'unità. Tali poligoni elevati i minori sopra i maggiori ne danno l'immagine della piramide rappresentante il numero piramidale. Si prenda per esempio il settimo termine nelle piramidi pentagone seconde, che è 287. Questo è la somma de' pentagoni centrali dal settimo loro termine 106 venendo alla unità. Nel modo stesso il decimo termine nelle piramidi seconde quadrate è 670; ed esso truovasi eguale a dieci primi termini de' quadrati secondi.

Anche le colonne, o prismi centrali vengono da' poligoni centrali. La colonna centrale di certo nome ha per base il poligono centrale del medesimo nome, che corrisponde al termine, in cui si prende la colonna. Se tal base si moltiplichi pel numero esprimente il termine, cui appartiene si la colonna, che il poligono, s'ottiene la colonna. Si voglia il termine ottavo del prisma secondo eptagono. Si prenda il numero 197, che è l'ottavo termine de' piani eptagoni centrali; e si moltiplichi questo numero per 8. Ne viene 1576 ottava colonna eptagona seconda.

5. Restano le serie, che costruire si possono co' poligoni regolari. Maurolico osserva, che le piramidi e i cubi si potrebbero esprimere co' termini delle serie già esposte ne' solidi primi, e ad esse ridurre si potrebbono altresì gli ottaedri. Ma non veggendo modo d' inchiudervi nè i dodecaedri, nè gl' icosaedri, ha immaginato un artifizio onde colla stessa regola formare tutti cinque i solidi regolari co' termini di certe serie. In tutti adunque a formare il secondo termine mette una unità nel centro, ed una unità in ciascun angolo solido, ed una pure nel centro d'ogni piano, che circonda il solido. Quindi nella serie de' tetraedri il secondo termine risulta 9; nella serie de' cubi 15; in quella degli ottaedri pure 15; nella serie de' dodecaedri 33; il qual numero forma altresì il secondo termine nella serie degl' icosaedri.

Per procedere agli altri termini delle serie in modo, che possano sempre rappresentare i solidi, egli fa passare tanti piani per le rette, che uniscono gli angoli solidi vicini, e per i semidiametri, che dall' unità

centrale si portano agli stessi angoli. Con ciò i cinque solidi restano divisi in certe piramidi. Il tetraedro, l'ottaedro, e l' icosaedro in piramidi triangolari; il cubo in piramidi quadrate; il dodecaedro in piramidi pentagone. Delle piramidi triangolari quattro ne convengono al tetraedro, otto all' ottaedro, venti all' icosaedro; il cubo rimane distinto in sei quadrate; ed il dodecaedro in dodici pentagone. Immaginata tale costruzione distribuisce l' unità in modo, che formino e le piramidi, ed i piani, che in ciascuno de' solidi si distinguono. Troppo sarebbe lungo seguire l' ingegnose riflessioni, dalle quali fa nascere la costruzione di ciascun solido regolare. Ma una general regola esporrò, che da il *N. A.* per passare con somma facilità dal termine *nesimo* qualunque al prossimo $\overline{n+1}$. esimo sì che quasi per se stesse si formino le serie. *Si prenda l' unità; il prodotto del numero* n *pel numero degli angoli solidi; il prodotto di quella piramide centrale nesima, in cui risolvesi il solido, pel numero de' piani, che lo chiudono; il prodotto del triangolo primo* $\overline{n-1}$ *esimo pel numero delle rette, che uniscono i prossimi angoli solidi. La somma di questi tre prodotti, e dell' unità forma il cercato termine* $\overline{n+1}$. *esimo della serie.*

Così se vuoi passare dal termine ottavo della serie de' cubi al nono, moltiplica $n=8$ pel numero degli angoli solidi nel cubo, che pure è 8, ed hai il primo prodotto 64. E poichè l'ottava piramide quadrata centrale è 344, se la multiplicherai pel numero de' piani, tra' quali si sta il cubo, cioè per 6, otterrai il secondo prodotto 2064. Il triangolo $\overline{n-1}$ esimo tra' primi, cioè il settimo, è 28, che multiplicato per le ret-

te, che uniscono gli angoli solidi nel cubo, ossia per 12, ti da il terzo prodotto 336. La somma di questi tre prodotti, e dell'unità ti offre 2465, che appunto è il nono termine nella serie esprimente i cubi.

Adoperando questa regola, e passando dal secondo termine al terzo, e dal terzo al quarto, e così agli altri, troviamo nel formare le serie degli ottaedri, e de' cubi, che siccome il secondo termine negli ottaedri è identico col secondo ne' cubi, così riesce il terzo col terzo, ed ogni altro identico col suo corrispondente. Dunque la stessa serie si costruisce e coll'ottaedro e col cubo. Lo stesso si dica degli icosaedri, e de' dodecaedri, che co' termini della medesima serie s' esprimono, siccome nella tavola si scorge.

6. Ciascuna classe dell' esposte serie, traendone l'ultima, contiene infinite serie, com'è chiaro a chi osserva, che i termini in colonna discendente vanno in continova ragione aritmetica, e Maurolico stesso l'osservò. Questi poich' ebbe poste sott' occhio le sue serie, dimostrò intorno ad esse un gran numero di teoremi, i quali e la loro natura dimostrano, ed in primo luogo insegnano i rapporti, che regnano tra' termini di ciascuna serie con quegli di ciascun'altra. Io ho aggiunto a ciascuna serie il termine generale, e la somma generale altresì. Quello, e questa ho immediatamente raccolto o dalle definizioni stesse, o da' teoremi, che l'autore va dimostrando. Quindi i termini generali, e le somme furono già trovate dal Messinese Geometra, nè io ci ho altra parte, che d' averne ridotte l' espressioni al linguaggio, che ora si usa. Dunque Maurolico è il primo, che delle serie abbia dato i ter-

mini, e le somme generali. A me è di maraviglia non solamente com' egli l'abbia fatto a que' tempi, ma l'abbia fatto in modo tanto scientifico, essendo la sostanza di quell' espressioni sviluppata, e dichiarata con raziocinj dipendenti dall' intima natura delle serie, e non già coll' induzione, siccome dopo di lui tanti anno fatto, ed alcuni vanno faccendo tuttavia.

Queste serie non sono un oggetto solamente d' astratta speculazione, ma assai per se stesse sono importanti, sebbene il loro autore non l'abbia per avventura conosciuto interamente. Lascio quelle, che servono al facile calcolo del numero di solidi in cert' ordine disposti, siccome quelle de' numeri triangolari, de' quadrati, de' piramidali. Tutte certo possono servire a quel rilevante oggetto, cui le indirizzò l' acutissimo Wallis, alla misura cioè dell' aree, e delle solidità. In fatti un buon numero delle serie wallisiane sono le stessissime serie di Maurolico. Wallis ne truova la somma totale, e sempre v' arriva coll' induzione. Maurolico con sottile discorso da il modo d' averne la somma generale, cosa assai più malagevole, ed utile. Il *N. A.* però non ne fece l'utili applicazioni, che ne fece Wallis, nè pensò al metodo anche più utile d' interpolarle, che è propria, ed insigne lode dell' inglese geometra. Intanto può fare sorpresa il vedere, che da' tempi di Maurolico a que' di Wallis non siasi fatto quel caso, che si doveva, di queste serie, che pur contengono tante belle speculazioni, e sì agevolmente richiamansi ad insigni usi geometrici, ed analitici. Dico fino a' tempi di Wallis, giacchè allora appunto scrisse cose utilissime, e affatto originali e sopra queste, e sopra altre serie l' esimio Pascal.

8. Non si dee qui dissimulare, che Diofanto aveva trattato de' numeri poligoni, e però, che questa classe di serie già era trovata. Ma, come da principio avvisai, nè Maurolico vide, nè potette vedere le scritture di Diofanto, che quando e' scriveva, sepolte stavansi negli scrigni di poche librerie. E si dee anche osservare, che Diofanto mirò solo a trovare il numero poligono dato il lato, o a trovare il lato dato il numero poligono; ma niente in lui s'incontra, che conduca alla somma delle sue serie, che poi non formano, che una parte di tante, che Maurolico considerò.

9. Chi rilevare volesse i nuovi teoremi, che nel primo libro delle dottrine aritmetiche s'incontrano, dovrebbe buona parte di quel trattato trascrivere. Alcuni pochi ne toccherò, che assai mostrano quanta fu la sagacità di quest' uomo.

Comincio da una specie di numeri, di cui s' occuparono i vecchj aritmetici, nè fu però disprezzata da più recenti. Questi sono i numeri perfetti. Il celebre Krafft nel settimo volume de' vecchj atti di Pietroburgo rapporta un metodo dell' insigne geometra Tobia Majer per ritrovare i numeri perfetti, scevro da que' pericoli d' errore, a' quali spesso conducono le regole di parecchj scrittori d' aritmetica. Con questo metodo s'arriva alla formola $(2^{n-1})(2^n - 1)$ poco prima dal grande Eulero trovata, la quale sempre somministra un numero perfetto, solo che il fattore $2_n - 1$ sia un numero primo. Da questa formola conchiudesi tutti i numeri perfetti appartenersi alla serie de' numeri triangolari. Conseguenza, che non so se attribuire si debba o a Majer inventore, o a Krafft espositore del me-

todo, poichè quest' ultimo nol dice. So bene che più d' un secolo e mezzo prima lo stesso con fino raziocinio aveva conchiuso Maurolico; siccome vedesi nella proposizione 25ª. del primo libro. Ma v' è anche di più. Già nella prop. 24ª. aveva dimostrato, che ogni numero perfetto si contiene nella serie degli esagoni, cioè aveva chiusi i numeri perfetti in un complesso di termini quasi della metà più pochi, che non fecero poi Majer, e Krafft.

10. Il secondo teorema, che mi piace di recare in pruova della sagacità, che ebbe Maurolico nell' indagare le nuove proprietà de' numeri, è la propos. 62ª del primo libro. Volendo io andar dietro insieme alla brevità, ed alla chiarezza, l' enuncierò com' ora farebbe un analista, che la prima volta lo proponesse. Egli è tale: sia la progressione 1 , 3 , 7 , 13 , 21 , 31 , 43 ...., $n \cdot \overline{n-1} + 1$. Di questa prendasi un termine, e gli si aggiungano tutti i termini dispari, che tra esso, ed il seguente della progressione si possono interporre. La somma del termine assunto, e degli aggiunti è il cubo del numero, che denomina il termine assunto nella progressione. Prendo per esempio il termine quarto, che è 13. Tra questo, ed il seguente 21 stanno i numeri dispari 15 , 17 , 19. Essi sommati con 13 ne danno il cubo di 4. Generalmente prendasi nell' esposta progressione il termine resimo, che sarà $r \cdot \overline{r-1} + 1$, onde il seguente $\overline{r+1} \cdot r + 1$. La loro differenza è $2r$; e poichè tutti i termini della proposta progressione sono numeri dispari, come ne mostra il termine generale, i due termini resimo, e $\overline{r+1}$. esimo insieme cogl' interposti formano una progressione di numeri dispari, e

quindi la loro costante differenza è 2. Ma $2r$ è la differenza tra'l primo, e l' ultimo. Dunque il numero de' termini è $r+1$, ed i termini della medesima progressione meno l' ultimo $\overline{r+1}\,.\,r+1$ sono in numero r. Pertanto la somma de'termini $r.\overline{r-1}+1$, $r.\overline{r-1}+3$...., $\overline{r+1}\,.\,r-1$ formerà la somma del termine resimo, e degli aggiunti. Tale somma è r^3. Dunque la somma dell' assunto resimo, e de'numeri aggiunti è il cubo di r. Come fu proposto.

11. Finirò colla propos. 22ª. d' una piccola aggiunta, che il *N. A.* fa al primo libro. Questa determina la forma generale della quarta potestà del binomio $b+c$. Egli riduce la quarta potestà di tale binomio alla somma de' cinque termini $m, 4.n, 6.o, 4.p, q$. Non avendo ancora l' uso de'segni indicanti la somma e la moltiplicazione, nè essendo ancora introdotto d'esprimere le potestà cogli esponenti, chiama fin dal principio della sua operazione m la quarta potestà di b; n il prodotto del cubo di b per c; o il prodotto de' quadrati di b, e di c; p il prodotto di b pel cubo di c; finalmente q la quarta potestà di c. Onde quella proposizione contiene la dimostrazione dell' equazione $(b+c)^4 = b^4 + 4.b^3c + 6.b^2c^2 + 4.bc^3 + c^4$. Chi leggerà il processo, con cui dalla prima proposizione della detta aggiunta fatta al primo libro s' avanza fino alla 22ª, scorgerà due cose, che egualmente mostrano il pregio di quest' invenzione. Vedrà primieramente, che collo stesso metodo con somma facilità si perviene alla general forma di tutte le potestà passando dalla quarta alla quinta, e da questa con ordine all' altre. In secondo luogo scorgerà uno spedito uso dell' a-

ritmetica speciosa, di cui dissi fin da principio doversi l'invenzione a Maurolico. Questo sarà il soggetto della seconda parte delle mie storiche osservazioni; ove di questa 22ª. proposizione s' avrà di nuovo a parlare.

PARTE SECONDA

Osservazioni al secondo libro

12. Maurolico nel secondo libro è principalmente inteso a fondare la teoria, e la pratica delle dottrine aritmetiche sopra dimostrazioni sode, ed universali. Quegli che prima di lui scrissero, o si contentarono di dichiarare la verità delle regole con opportuni esempj, e al più per i casi particolari si studiarono di dimostrarle; oppure si servirono delle linee, e delle loro proprietà, tra' quali segnalossi Euclide. Il N. A. riguardò il primo metodo come poco universale, e scientifico; il secondo come poco diretto, e spedito. Quindi gli nacque il felice pensiere d' esprimere con generali simboli ogni maniera di quantità, e scelse le lettere dell'alfabeto. Dopo avere significato per a, b, c, d, ec. le quantità delle quali può essere questione, passò a dare regola per eseguire colle lettere i calcoli, che gli aritmetici fanno co' numeri, e a dimostrare legittime le consuete operazioni dell'aritmetica. Ecco stabilita l'idea dell' aritmetica speciosa, di cui tosto s' accinge ad ispiegare gli artifizj in quel miglior modo, che si può desiderare dal primo, che entra in questo campo; in modo cioè alquanto imperfetto, sebbene valente fosse il coltivatore.

13. Nelle cinque prime proposizioni dichiara potersi ogni quantità significare con simboli universali, e con essi potersi eseguire tutti i calcoli, che altri fa con numeri. Per farsi strada alle cose, che ha in animo d'insegnare, alquante proposizioni stabilisce, che quasi assiomi saranno senza dubbio ricevute da tutti. Quì cominciano le regole dell' operazioni. Io non tesso un commento dell' opera di Maurolico, nè intendo di recitare le molte cose, ch'egli va esponendo; ma solo di far conoscere fin dove egli sia pervenuto. Per brevità farò uso de' segni dell' operazioni, e degli esponenti, ch' egli non conosceva.

14. Nelle proposizioni, che dalla sesta cominciano, e finiscono nella tredicesima, troviamo dimostrate le seguenti regole. Primo, $a+b$ significa la somma delle due quantità a, b; $a-b$ è la loro differenza; e così la somma delle quantità $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ è $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, e la differenza loro $\sqrt{a}-\sqrt{b}$. Secondo, il prodotto di a per b è $a \times b$, il quoziente $\frac{a}{b}$. Terzo, se le quantità sono rotti, la somma delle due $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ è $\frac{a\,d+b\,c}{b\,d}$, e la loro differenza $\frac{a\,d-b\,c}{b\,d}$. Quarto, il prodotto di $\frac{a}{b}$ e di $\frac{c}{d}$ risulta $\frac{a\,c}{b\,d}$, ed il quoziente $\frac{a\,d}{b\,c}$. Quinto, il prodotto di $\sqrt{a}$ per $\sqrt{b}$ è $\sqrt{a\,b}$, di $\sqrt[3]{a}$ per $\sqrt[3]{b}$ è $\sqrt[3]{a\,b}$, di $\sqrt[4]{a}$ per $\sqrt[4]{b}$ è similmente $\sqrt[4]{a\,b}$.

Ben è vero, che la mancanza de' segni rende alquanto spinose le dimostrazioni del N. A; e meno facile l' uso delle regole. Egli è obbligato a pronunciare ogni volta l' operazioni, che vuol fare, ed i vocaboli *più, meno, moltiplicato, diviso, prodotto, quoziente,* e non avendo l' arte di significare le potestà cogli esponenti, si truova in necessità d'indicarle con nuove lettere; e non ponendo queste sott'occhio i risultati, dee tessere raziocinj alle volte non brevi. Finalmente non possono le formole offerire immediatamente il proprio valore, onde quasi d' un colpo l' occhio le apprenda. Ma si vuole anche considerare, che quest'opera fu la prima culla dell' aritmetica speciosa, e si dee tanto più ammirare l' industria di Maurolico, quanto la mancanza de' segni più rendeva difficile l'esecuzione del nuovo disegno.

15. La proposizione 15ª comincia a trattare de' polinomii. Se ci fermiamo alla somma, ed alla sottrazione, avvisa, che s'eseguiscono co' vocaboli *più*, *meno*, e dà le regole, che prescrivono essere $a + b + c - d$ la somma delle quantità $a + b, c - d$, e così pure $a + b - c + d$ la loro differenza; la quale riesce nulla, ove la prima quantità s' uguaglj alla seconda.

16. La proposizione 16ª entra a dire della moltiplicazione de' polinomii. Per preambolo fissa la regola de' segni, ed il valore de' prodotti, quale precisamente noi l' abbiamo, e quale fu conosciuta e dimostrata da Luca Paccioli, come Wallis osservò, ed io ho riscontrato. Assai ingegnosa però è la dimostrazione di Maurolico, e poco diversa da quella, che recano esatti analisti de' nostri giorni; se non che il N. A. la ricava

faccendo il prodotto della differenza di due rette nella differenza di due altre. Riduce questo prodotto a contenere nove termini, i quali non possono uguagliarsi al vero prodotto, se otto di loro non si distruggono, nè distruggere si possono, quando più per più, e meno per meno non diano più; e più per meno, e meno per più non diano meno. A questa dimostrazione unisce varj riflessi metafisici, che alla medesima conseguenza conducono, de'quali allo stesso oggetto fecero uso e Vieta, e Wallis.

Di quì vengono le regole per moltiplicare, e per dividere i polinomii per i polinomii, le quali nelle proposizioni 17ª, 18ª, 19ª si chiudono.

17. Nelle proposizioni che rimangono sino alla fine della prima parte del secondo libro s'insegna a formare le potestà sì de' monomii, che de' polinomii. Inoltre ad estrarre le radici da' monomii, ove prescrive regole molto utili, e spedite per ottenere le radici prossime alle vere, quando la quantità proposta non sia potestà perfetta. Che se di più non dice in questo luogo dell'estrazione delle radici, egli è perchè già in altr'opera, in cui espose i dati di Teone, aveva di questa materia ampiamente trattato.

Intanto per l'estrazione delle radici, che riescono irrazionali, dalle potenze perfette, serve mirabilmente la proposizione 13ª, dalla quale, significando al modo nostro le potestà e le radici, si anno le tre seguenti equazioni: $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+2\sqrt{ab}+b}$; $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a+3\sqrt[3]{a^2b}+3\sqrt[3]{ab^2}+b}$; $\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}=$

$$\sqrt[4]{a + 4\sqrt[4]{a^3 b} + 6\sqrt[4]{a^2 b^2} + 4\sqrt[4]{a b^3} + b}.$$

18. Nel finire della prima parte delle presenti osservazioni promisi di dovere ancor dire sopra la proposizione 22ª dell'aggiunta al primo libro; e due cose a singolar lode di Maurolico accennai. Primo, che nell'ordine delle proposizioni, colle quali arriva a determinare la forma della quarta potestà d'un binomio, risplende uno spedito uso dell'aritmetica speciosa. Secondo, che il metodo dell'autore serve non meno a determinare la forma delle più alte potestà senza limite. L'una cosa e l'altra dimostro di presente.

Volgesi da principio l'autore ad esprimere il quadrato del binomio $b+c$; e supponendo $b^2=d$, $c^2=f$, $bc=e$, ha le due equazioni $(b+c)\,b=d+e$, $(b+c)\,c=e+f$, onde $(b+c)(b+c)=d+2e+f$, ossia $(b+c)^2=d+2e+f=b^2+2bc+c^2$

Passando al cubo suppone di nuovo $b^3=g$, $c^3=l$, e le due medie proporzionali, che stanno tra b^3, c^3, cioè b^2c, bc^2 le chiama h, k. Quindi moltiplicando il dato binomio per le parti già trovate del quadrato ottiene l'equazioni $(b+c)\,d=g+h$, $(b+c)\,2e=2h+2k$, $(b+c)f=k+l$. Cioè $(b+c)(d+2e+f)=g+3h+3k+l$. E ponendo per $d+2e+f$, e per le quantità che compongono il secondo membro, i dovuti valori, ha $(b+c)(b+c)^2=b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$, o che è lo stesso $(b+c)^3=b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$. Viene finalmente alla quarta potestà, e al solito mette $b^4=m$, $c^4=q$, e le quantità b^3c, b^2c^2, bc^3 medie proporzionali tra b^4, c^4 le chiama n, o, p. E moltiplicando il binomio $b+c$

per le parti del trovato cubo $g+3h+3k+l$ esprime le quattro equazioni: $(b+c)g=m+n, (b+c)3h=3n+3.o, (b+c)3k=3.o+3p$, $(b+c)l=p+q$. Laonde $(b+c)(g+3h+3k+l)=m+4n+6.o+4p+q$. Dunque $(b+c)(b+c)^3=(b+c)^4=m+4n+6.o+4p+q=b^4+4b^3c+6.b^2c^2+4bc^3+c^4$.

E' così chiaro che le regole dal N. A. prescritte per le operazioni dell'aritmetica speciosa, sono in tutto il processo ora esposto speditamente, e legittimamente adoperate, che non occorre dirne di più. Solo farò vedere, che il suo metodo a trovare la quarta potestà d'un binomio, serve esattamente per le più alte potestà. Poichè se multiplicherai il binomio $b+c$ per le parti dell'antecedente potestà già formata, avrai la seguente, che cerchi.

Per ottenere la quinta metti $b^5=x, c^5=y$, e le medie proporzionali $b^4c, b^3c^2, b^2c^3, bc^4$, che stanno tra b^5, e c^5, chiamale r,s,t,v. Or moltiplica il binomio per le parti componenti la quarta potestà, che già è in tuo potere, e nasceranno l' equazioni $(b+c)m=x+r; (b+c)4n=4r+4.s; (b+c)6.o=6.s+6.t; (b+c)4p=4t+4v; (b+c)q=v+y$. Onde $(b+c)(4n+4n+6.o+4p+q)=x+5.r+10.s+10.t+5v+y$, e sostituendo $(b+c)^5=b^5+5b^4c+10.b^3c^2+10b^2c^3+5bc^4+c^5$.

Così dalla quinta salirai alla sesta, e da questa all'altre. Quest' uso del suo metodo fu dallo stesso Maurolico conosciuto, lasciando che altri a svolgerlo s' applicasse.

19. La seconda parte del secondo libro è una continova applicazione dell' aritmetica speciosa alla gene-

rale teoria delle quantità irrazionali. Il decimo libro d' Euclide è il più importante, e sublime tra quegli, che trattano de' numeri. Quivi esamina le quantità incommensurabili, ed irrazionali, spiega la loro natura, mostra la loro origine, ed è in primo luogo sollecito di distinguere i casi, ne' quali gl' irrazionali o monomii, o binomii combinandosi insieme per mezzo dell'operazioni aritmetiche producono altre quantità ora razionali, ora irrazionali. In questo s' occupa la prima parte di quel libro, la quale somministra perciò un criterio, che fa distinguere la natura de' resultati, che proposti al geometra certi problemi, debbono venire. Di tale criterio usa poi nel rimanente di quel libro. Ma Euclide s' arresta alle quantità, che o riescono razionali in potenza, o rimangonsi anche in potenza irrazionali, delle quali cioè i quadrati risultano o razionali, o irrazionali. Maurolico scorre più oltre. Molte delle cose, che cerca, e definisce Euclide intorno alle quantità co' proprj quadrati paragonate, il *N. A.* sul finire della seconda parte del libro secondo le cerca, e le definisce per quelle quantità ancora, delle quali non già i quadrati, ma o i cubi, o le quarte potestà sono o non sono razionali; e accenna casi, ne' quali restasi irrazionale qualunque potestà, cui s'innalzino certe quantità. Amplifica per tal modo i criterj d' Euclide, e previene i posteriori analisti in qualche punto, che riguarda l' equazioni più alte.

20. Ma quello, che rende questa parte assai più pregevole è lo strumento, di cui servesi nel dichiarare le dottrine degl' irrazionali. Egli non vuol usare nè di linee, nè di costruzioni. Tutto eseguisce colla nuova

sua aritmetica simbolica, colla quale togliendosi dalla ristretta considerazione di numeri, di linee, e di aree trasporta le dottrine ad ogni genere di quantità, e ad esse estende i teoremi, che Euclide limita alle linee; e tratta ogni cosa con quello strumento analitico, di cui già s'era nella prima parte proveduto. E' bello udire dallo stesso Autore il progetto dell'opera, cui s'accinge a finire. Così adunque ne' prolegomeni alla seconda parte del secondo suo libro.

„ Non per lineas, et areas, quemadmodum Euclides, sed sub terminis commensurabilium, et incommensurabilium quantitatum, earum conditiones, proprietates, et colligantias proponemus, ac per nostra supposita demonstrabimus. Nec facile quispiam fuisse putet elementa hujusmodi a lineis, et areis ad quantitatem in genere sumptam transferre, et numerariam simul praxim hinc derivatam ostendere: quippe quae sicut passim in trivialibus scholis trita, ita necubi satis fuerat demonstrata. Ordior itaque novum demonstrandi genus, tantoque in hac parte praestantius enclideo, quanto generalis quantitas dignior ac purior, et primariae mathematicae, quam linea specialis, est convenientior. Simul per viam hanc, quam in demonstrando assumimus, multa notescent, quae in decimo elementorum desiderantur.

21. Le nuove cose, che promette, non si contengono solamente nelle nuove specie d'irrazionali, che al proprio esame sottopone; ma ancora in un buon numero di nuovi, e utili teoremi, come ciascuno può per se stesso vedere; e principalmente verso la fine, ove parla de' lati, e dell' aree delle figure regolari. Un sol

teorema di questa seconda parte indicherò per la sua eleganza. La quantità M, che multiplicando il binomio $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ produce una quantità razionale, dee avere la forma $n\sqrt{a} \mp n\sqrt{b}$, essendo n una quantità razionale. Non dimentichi il discreto lettore, che ciò fu insegnato alla metà del secolo decimosesto.

Tot. gener.	*Somma Generale*
Radici . . .	$\frac{n^2 + n}{2}$
Dispari . .	n^2
Pari . . .	$n^2 - n$

Tavola A	Numeri Lineari	Term. gener.	Somma Generale
Radici	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,	n	$\frac{n^2+n}{2}$
Dispari	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19,	$2n-1$	n^2
Pari	0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18,	$2n-2$	n^2-n
Superficiali			
Triangolari primi	1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55,	$\frac{n^2+n}{2}$	$\frac{n.n+1.n+2}{1.2.3}$
Quadrati primi	1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100,	n^2	$\frac{n.n+1.2n+1}{1.2.3}$
Rettangoli	0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90,	n^2-n	$\frac{n-1.n.n+1}{3}$
Pentagoni primi	1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145,	$\frac{3n^2-n}{1.2}$	$\frac{n^2.n+1}{1.2}$
Esagoni primi	1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, 153, 190,	$2n^2-n$	$\frac{n.n+1.4n-1}{1.2.3}$
Piramidali primi			
Piramidi triangolari prime	1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220,	$\frac{n.n+1.n+2}{1.2.3}$	$\frac{n.n+1.n+2.n+3}{1.2.3.4}$
Piramidi quadrate prime	1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204, 285, 385,	$\frac{n.n+1.2n+1}{1.2.3}$	$\frac{n.n+1.n+2.2n+3}{1.2.3.4}$
Piramidi pentagone prime	1, 6, 18, 40, 75, 126, 196, 288, 405, 550,	$\frac{n^2.n+1}{1.2}$	$\frac{n.n+1.n+2.3n+1}{1.2.3.4}$
Piramidi esagone prime	1, 7, 22, 50, 95, 161, 252, 372, 525, 715,	$\frac{n.n+1.4n-1}{1.2.3}$	$\frac{n^2.n+1.n+2}{1.2.3}$
Prismatici primi			
Prismi triangolari primi	1, 6, 18, 40, 75, 126, 196, 288, 405, 550,	$\frac{n^2.n+1}{1.2}$	$\frac{n.n+1.n+2.3n+1}{1.3.4}$
Prismi quadrati primi, cioè cubi	1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000,	n^3	$\frac{n^2.n+1^2}{4}$
Prismi pentagoni primi	1, 10, 36, 88, 175, 306, 490, 736, 1053, 1450,	$\frac{3n^3-n^2}{1.2}$	$\frac{n.n+1.9n^2+5n-2}{1.2.3.4}$
Prismi esagoni primi	1, 12, 45, 112, 225, 396, 647, 960, 1377, 1900,	$2n^3-n^2$	$\frac{n.n+1.3n^2+n-1}{1.2.3}$
Superficiali secondi centrali			
Triangoli secondi	1, 4, 10, 19, 31, 46, 64, 85, 109, 136,	$\frac{3n^2-3n+2}{1.2}$	$\frac{n.n^2+1}{1.2}$
Quadrati secondi	1, 5, 13, 25, 41, 61, 85, 113, 145, 181,	$2n^2-2n+1$	$\frac{n.2n^2+1}{3}$
Pentagoni secondi	1, 6, 16, 31, 51, 76, 106, 141, 181, 226,	$\frac{5n^2-5n+2}{1.2}$	$\frac{n.5n^2+1}{1.2.3}$
Esagoni secondi	1, 7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217, 271,	$3n^2-3n+1$	n^3
Eptagoni secondi	1, 8, 22, 43, 71, 106, 148, 197, 253, 316,	$\frac{7n^2-7n+2}{1.2}$	$\frac{n.7n^2-1}{1.2.3}$
Ottagoni secondi	1, 9, 25, 49, 81, 121, 169, 225, 289, 361,	$4n^2-4n+1$	$\frac{n.4n^2-1}{3}$
Piramidi seconde centrali			
Piramidi triangolari seconde	1, 5, 15, 34, 65, 111, 175, 260, 369, 505,	$\frac{n(n+1.n+2+n-1.2n-1)}{1.2.3}$	$\frac{n.n^2+2n^2+3n+2}{2.4}$
Piramidi quadrate seconde	1, 6, 19, 44, 85, 146, 231, 344, 489, 670,	$\frac{n(n+1.2n+1+n-1.2n-1)}{1.2.3}$	$\frac{n.n^2+2n^2+2n+1}{1.2.3}$
Piramidi pentagone seconde	1, 7, 23, 54, 105, 181, 287, 428, 609, 835,	$\frac{n(3n.n+1+n-1.2n-1)}{1.2.3}$	$\frac{n.5n^3+10n^2+7n+2}{1.2.3.4}$
Piramidi esagone seconde, che riescono cubi primi	1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000,	n^3	$\frac{n^2.n+1^2}{4}$
Piramidi eptagone seconde	1, 9, 31, 74, 145, 251, 399, 596, 849, 1165,	$\frac{7n^2-n}{1.2.3}$	$\frac{n.7n^2+14n^2+5n-2}{1.2.3.4}$
Piramidi ottagone seconde	1, 10, 35, 84, 165, 286, 455, 680, 969, 1330,	$\frac{4n^2-n}{3}$	$\frac{n.2n^2+4n^2+n-1}{1.2.3}$
Prismi secondi centrali			
Prismi triangolari secondi	1, 8, 30, 76, 155, 276, 448, 680, 981, 1360,	$\frac{3n^4-3n^2+2n}{1.2}$	$\frac{n.3n^3+2n^2+n-2}{2.4}$
Prismi quadrati secondi	1, 10, 39, 100, 205, 366, 595, 904, 1305, 1810,	$2n^4-2n^2+n$	$\frac{n.3n^3+2n^2+1}{1.2.3}$
Prismi pentagoni secondi	1, 12, 48, 124, 255, 456, 742, 1128, 1629, 2260,	$\frac{5n^4-5n^3+2n}{1.2}$	$\frac{n.15n^2+10n^2-3n+2}{1.2.3.4}$
Prismi esagoni secondi	1, 14, 57, 148, 305, 546, 889, 1352, 1953, 2710,	$3n^4-3n^2+n$	$\frac{n.3n^2+2n^2-n}{4}$
Prismi eptagoni secondi	1, 16, 66, 172, 355, 636, 1036, 1576, 2277, 3160,	$\frac{7n^4-7n^2+2n}{1.2}$	$\frac{n.21n^2+14n^2-9n+2}{1.2.3.4}$
Prismi ottagoni secondi	1, 18, 75, 196, 405, 726, 1183, 1800, 2601, 3610,	$4n^4-4n^2+n$	$\frac{n.6n^2+4n^2-3n+1}{1.2.3}$
Solidi regolari			
Tetraedri, o Piramidi	1, 9, 35, 91, 189, 341, 559, 855, 1241, 1729,	$2n^3-3n^2+3n-1$	$\frac{n^4+n^2}{1.2}$
Ottaedri (serie che esprime anche i cubi)	1, 15, 65, 175, 369, 671, 1105, 1695, 2465, 3439,	$\frac{4n^3-6n^2+4n-1}{3}$	n^4
Icosaedri (serie che esprime anche i dodecaedri)	1, 33, 155, 427, 909, 1661, 2743, 4215, 6137, 8569,	$10n^3-15n^2+7n-1$	$\frac{5n^4-3n^2}{1.2}$

SULL' APPARECCHIO LATERALE

colla descrizione di nuovi strumenti onde rendere più sicura la litotomìa.

Di Giuseppe Atti

presentata a' primi di febbrajo. 1808

Fra tutte le operazioni chirurgiche fu sempre da' più valenti professori coltivata la litotomia. Per essa gareggiar si vide in tutti i tempi l' industria de' chirurghi intenti ognora ad immaginar nuovi metodi onde con più di facilità, e sicurezza esercitarla. Ed era in fatti ben degno oggetto della loro compassione lo stato deplorabile de'pietranti condannati a condurre fra lo stento, e gli spasimi una vita peggior della morte; ed un sacro dovere d' umanità doveva moverli a tentare di porgere a questa classe d'infelici un qualche nuovo sollievo. Da questi stessi motivi io pure ne' miei primi anni di professione fui condotto a rivolgere le principali mie cure a questa operazione, ed a studiare attentamente quanti metodi erano stati per essa immaginati. Ma in mezzo ad una farragine di nuovi metodi successivamente ideati e messi in opera, non mi riuscì di

rinvenirne alcuno, il quale appieno potesse soddisfarmi. Molti in fatti fra questi sono da lungo tempo interamente proscritti, altri, che levarono sul principio alto grido, e molta fama procurarono ai loro inventori, non corrisposero poscia all'aspettazione, nè al giudizio ressero dell'esperienza. Quanto ai metodi più recenti, ne' quali la maggior parte de' chirurghi sembra con più confidenza riposare, quantunque a dir vero poco lascino a desiderare per riguardo alla semplicità, non van però esenti d'ogni pericolo, nè abbastanza assicurano la mano dell'operatore, ed il buon esito del taglio. Ben mi parve di ravvisare, che gl'inconvenienti di questi ultimi metodi potessero di leggieri rimoversi correggendo in parte il metodo, e sopra tutto cangiando la forma del litotomo di cui si vale l'operatore. L'esperienza di molte e molte operazioni ha così bene corrisposto alle mie speranze, che io ardirò con coraggio asserire, che le modificazioni, e i cangiamenti che sono per esporre, non solo hanno resa più comoda, e facile l'operazione, ma hanno di più tolti di mezzo quei pericoli, che lo scoglio formarono mai sempre della litotomia.

Fin dagli ultimi anni del secolo decimo settimo allorchè il metodo di Fra Giacomo, malgrado le imperfezioni e i difetti del medesimo, e le censure, che ne sofferse l'autore, levò in Francia si alto grido, fu riguardato l'apparecchio laterale come il migliore di tutti, qualora particolari circostanze non obbligassero a servirsi d'altro metodo. La fortuna di Rav contribuì moltissimo ad accreditarne l'uso, e si può dire, che da quell'epoca quasi più non si operò, che coll'apparec-

chio laterale. Era però tra gli operatori diversità nella scelta e nel maneggio degl' istrumenti, e quindi la lunga serie de' differenti processi operativi, che sorsero in breve spazio di tempo l'uno dopo l'altro, quali sono quelli di Ceseldeno, Ledran, Fra Cosimo, Moreau, Pouteau, Foubert, Thomas, Le Cat, ed Haukins. Incerto a quale di questi metodi dovessi io appigliarmi facilmente mi sarei determinato per uno di quelli, che nella folla si distinguevano, ed avevano nome, e seguaci a preferenza degli altri, se la sicurezza del metodo di Pouteau non mi avesse allettato assicurando l'animo indeciso, e timido d' un principiante, che alla speditezza dell' operazione a ragione preferisce la maggiore sicurezza dell'esito. Egli è perciò che malgrado l' imbarazzo, che pur reca in tal metodo la moltiplicità degl' istrumenti m'attenni per più di trenta operazioni al metodo di Pouteau. L' esito fu sì fortunato, che io non l'avrei giammai lasciato se fatto più coraggioso per l' esercizio, e confidando nella modificazione degli strumenti ch' io immaginai, non avessi creduto potere unire alla semplicità del metodo di Ceseldeno una soddisfacente sicurezza.

La ferita della pudenda profonda, il taglio dell'intestino retto, l'offesa della vescica, o nel suo fondo, o in diversi punti della medesima sono li pericoli, che formano lo scoglio di questa operazione, pericoli tanto maggiori nel metodo di Ceseldeno quanto che è assai da temersi l'aberrazione del coltello, che rimanendo allora senza scorta può offendere facilmente le dette parti, e condurre a micidiali conseguenze. Questo però nasceva a mio avviso dalla forma del coltello stesso di

cui si faceva uso. Conoscevasi egli è vero la grande utilità del coltello panciuto ossia convesso, e di tale coltello si valevano nel taglio; ma siccome a questa convessità faceano corrispondere una costa diritta, o quasi diritta, così onde il taglio non divenisse troppo ampio e sproporzionato, era d' uopo, che la convessità fosse assai piccola, e la punta del coltello presso che diritta; era perciò necessario penetrare molto oltre colla punta in vescica affinchè la massima convessità arrivasse a tagliarla come conveniva. Ognuno vede quali e quanti inconvenienti derivar possano da un taglio eseguito con simile istrumento. In primo luogo dovendo il coltello insinuarsi molto addentro nella vescica corre gran rischio di toccarne il fondo, o di offenderla in vari punti delle sue pareti. In secondo luogo poi è troppo facile, che il coltello, che ha la costa diritta possa sortir fuori della scanalatura del sciringone, e così o non entrare in vescica, o errare senza guida per la medesima. Quindi quei pericoli, e quei danni, che si volevano attribuire al semplice metodo di Ceseldeno, e che in vece doveano ripetersi dalla forma del coltello non opportuna. Pensai pertanto a farne costruire uno in nuova foggia, che da tali difetti andasse esente. Tale è quello che rappresenta la Fig. I.ª della Tav. I.ª. E' desso assai convesso nella medietà *A* della parte tagliente *B B* colla costa *C C* concava, e di una concavità corrispondente alla convessità, e scanalatura del sciringone. E' tagliente, ed affilato per qualche tratto nella sua punta dal lato concavo *D*, ed è fornito di un manico d' acciajo esso pure, *E E*, ed incurvato secondo l' andata della mano, ed il modo col

quale è d'uopo tenerlo. Un coltello di simile forma riunisce molti vantaggi. 1°. Il taglio da esso fatto riesce assai regolare formando questo col sciringone due curve perfettamente parallele. 2°. Essendo assai convesso nella medietà della curva, non è entrato di molto in vescica, che il taglio è già fatto in tutta la sua estensione. 3°. Combaciando perfettamente la costa concava colla convessità e scanalatura del sciringone, non potrà così facilmente sortire, ed abbandonare la sua guida. 4°. Avendo la sua punta tagliente ancora dal lato concavo, più facilmente si incide la parte membranosa dell'uretra per farsi strada dentro la scanalatura, e meglio ancora si dilata se fia d'uopo la parte superiore della ferita senza volgere il coltello. 5°. Il manico di ferro costruito nella descritta forma fa che esso adattandosi all'andamento della mano più destramente e con maggior sicurezza possa maneggiarsi. Questi vantaggi, che io mi prometteva da questa nuova forma di coltello furono dall'esperienza confermati, sicchè nelle numerosissime operazioni nelle quali in seguito ne ho fatto uso mai non mi è avvenuto di incontrare quei sinistri accidenti, che spesso come dissi, erano l'effetto dell'aberrazione del litotomo. A meglio intendere però l'utilità delle modificazioni stimo bene descrivere la maniera colla quale io procedo all'operazione. Fatto coricare supino il paziente su di una tavola a due piani costruita in modo, che il piano superiore rilevato da una parte formi un piano inclinato sull'altro, che rimane orizzontale, introduco in vescica un sciringone Fig. II[a] proporzionato al diametro dell'uretra, munito su la sua convessità *FF* di larga e profonda scana-

latura *GG* come osservasi nella Fig. III', chiuso nell'estremità *H*, e fornito di un manico *I I* lungo, piatto, e curvo un poco sul suo principio *K* sicchè possa essere con tutta fermezza sostenuto. Accertatomi con questo di nuovo dell'esistenza della pietra, fò situare il paziente nella comune maniera per l'operazione laterale sostenendolo in tal positura con semplicissimo apparecchio di legatura consistente in larghe striscie di robusta pelle fermate in due punti fissi della tavola, che non solo ha il vantaggio di sostenere, ed impedire al paziente ogni movimento senza recargli disagio e molestia, ma di più potersi applicare, e levare in pochissimo tempo, liberando così l'infermo e l'operatore di un imbarazzo, che allungare di troppo suole l'operazione. In seguito fo alzare il piano mobile della tavola dandogli quel grado d'inclinazione, che meglio serva a far sporgere in fuori il perineo, e la parte, che deve essere esposta al taglio. La positura inclinata sembrami preferibile all'orizzontale non essendo a mio parere troppo convincenti le ragioni, che in favore di questa si propongono da alcuni chirurghi. Consiste la più forte nel pericolo cui va esposta la vescica in tale positura di restare ferita in più luoghi allorchè compressa dai visceri abdominali dee necessariamente abbassarsi, restringersi, e formare varie pieghe. Ora questo pericolo parmi, che non sia guari maggiore nella positura inclinata, che nella orizzontale. Certo se l'operatore poco esperto, e poco avveduto spinge troppo oltre il coltello così che vada a ferire l'opposto lato, o se il coltello sortendo dalla scanalatura del sciringone resta perciò senza guida, potranno te-

mersi gravissimi danni; ma questi non ponno forse egualmente aver luogo nella giacitura orizzontale? Ove dunque sfortunatamente avvengano, non la positura del malato, ma l'inavvertenza dovrà incolparsene dell'operatore. Quanti vantaggi altronde non presenta la positura inclinata? Tratta la pietra dal proprio peso si porta verso il collo della vescica, e cade dirò così spontaneamente sotto la tanaglia, il perineo rimane più teso, e perciò meglio esposto al taglio, l'infermo stesso prova minor disagio nella positura inclinata. Per tali giusti motivi io ho sempre preferita quest'ultima all'orizzontale. Situato in tal modo il paziente ne sollevo le natiche, onde meglio sporga in fuori il perineo, e faccio da due assistenti tenere divaricate le coscie, mentre ad altro assistente sicuro, ed esercitato affido il sciringone, che bene impugnato colla sinistra mano lo porta in alto, e lo poggia col suo cavo contro l'osso del pube per allontanarlo dall'intestino retto piegandolo obbliquamente sull'inguine destro, ed un poco ancora sul ventre posteriormente così che fuori apparisca la sua scanalatura; lo stesso ajutante colla destra tira in alto lo scroto scoprendo in tal modo il perineo. Postatomi allora in faccia al paziente prendo colla destra mano il coltello quale è diverso di grandezza secondo l'età del soggetto, e la supposta mole della pietra, e tenendolo colle tre dita, pollice, indice, e medio come una penna da scrivere (Fig. IV') comincio il taglio a lato del rafe un pollice sopra l'ano prolungandolo a più di due pollici obbliquamente fin verso la tuberosità dell'ischio incidendo con questo taglio gl'integumenti; introduco l'indice della sinistra nell'an-

golo superiore della fatta ferita per andare in traccia del sciringone, ed appoggiando l' unghia del medesimo contro la sua scanalatura, dietro essa dirigo la punta del coltello per penetrare nella scanalatura suddetta obliquamente in modo, che secondi l' obliquità del sciringone; e scorrendo nella medesima direzione lungo tutta la scanalatura del suddetto, finchè la punta del coltello venga trattenuta dall' estremità chiusa, vengo a farmi strada nello spazio triangolare costituito dai tre muscoli, bulbo cavernoso, ischio cavernoso, e trasverso, e taglio l' uretra membranosa, la prostata trasversalmente, ed il collo della vescica, per cui ho una strada ampia a sufficienza ad estrarre ancora una pietra molto voluminosa. Compito il taglio ritiro allora il coltello seguendo pure la stessa scanalatura per non offendere nuove parti, introduco l' indice della sinistra, che percorrendo la curva del sciringone si fa strada in vescica per esplorare la pietra, e servire di conduttore alla tanaglia. Da questa descrizione del metodo di litotomia da me praticato appena abbozzata ad oggetto di intendere il maneggio degl' istrumenti da me proposti, rileverà ognuno quanto dal semplice cambiamento di forma del litotomo siasi allontanato il pericolo della temuta aberrazione, e come bene siasi proveduto alla sicurezza, senza nulla togliere alla semplicità e speditezza dell' operazione. Durante il corso di venticinque anni ne' quali mi sono sempre servito dei sopra descritti istrumenti per la litotomia, non ho avuto occasione giammai di pentirmi del metodo adottato, nè ho avuto lo sfortunato incontro di quei sinistri accidenti, che alcuna volta tengono dietro a sì pericolo-

sa operazione. Malgrado però li vantaggi così manifesti, ed una pratica coronata di così felice successo non credeva però rimosso per le proposte modificazioni ogni pericolo di aberrazione, nè abbastanza assicurato l'esito del taglio. Può in fatti accadere, che l'operatore devii dalla scanalatura del sciringone, o per involontario moto di mano non ferma, o per improvviso movimento del paziente, o per l' assistente, che tiene il sciringone; può avvenire di più, che lo stesso assistente scostando dal ventre il sciringone ne sollevi l' estremità, la quale non combaciando più colla punta del coltello si trovi questo libero ad inoltrarsi di più con pericolo, o di non entrare in vescica, o di portare inopportuna, e pericolosa lesione alla medesima. Vero è, che difficilmente può ciò accadere combinando così bene la forma del coltello con quella del sciringone; verissimo, che forse ciò non sarebbe giammai accaduto ad esperto, ed esercitato operatore. Tuttavia era d' uopo provedere meglio alla sicurezza del taglio per quelli particolarmente, che non usi abbastanza al maneggio degl' istrumenti, nè avendo per anche addestrata la mano all' esercizio di sì laboriosa operazione troppo facilmente deviar potrebbero dalla scorta, che condur deve il coltello nella vescica, senza obbligarli a ricorrere a quei metodi, che per assicurare l' esito del taglio rendono lunga, ed imbarazzante l' operazione. Mosso da tali ragioni pensai non ha molto a fare alcune altre modificazioni alli sopra descritti istrumenti per cui non solo fosse difficile, come prima avea ottenuto, ma fosse resa assolutamente impossibile l'aberrazione del coltello nell'esecuzione del taglio. Feci per-

tanto costruire un sciringone (Tav. II^a Fig. I^a) nella lunghezza, curvità, e forma perfettamente consimile a quello di cui faceva uso precedentemente a differenza della scanalatura *L L* (Fig. II^a) la quale nel principio *M M* ha un' apertura più ampia, ma che in seguito si restringe superiormente coll' avvicinarsi che fanno le laterali pareti della scanalatura ripiegandosi, ed avvicinandosi l' una contro l' altra nella parte superiore *N N* in modo da non lasciare, che uno spazio proporzionato a lasciare scorrere il coltello. Il coltello (Fig. III^a) in luogo di avere una punta acuta, termina nell' estremità in una testa acuminata *O*, per cui può liberamente e penetrare, e scorrere lungo la scanalatura del sciringone, ma insinuato che sia non può sortirne, e deviare dalla medesima scanalatura venendogli impedito dalle sopra ristrette pareti di seguitare altro cammino. Nel manico feci aggiugnere altro pezzo di metallo a guisa di coda *P*, che parte dalla convessità del medesimo, e fa con esso un angolo acuto *Q*. Questo poggia contro la palma della mano, e l' angolo, che egli forma va contro lo spazio, che rimane tra il pollice, e l' indice (Fig. IV^a). Facile cosa è il ravvisare l' utilità di queste modificazioni. Fatto il taglio degl' integumenti, ed aperta l' uretra membranosa nel luogo, che corrisponde appunto al principio della scanalatura più larga del sciringone con qualunque litotomo, vi si insinua il coltello bottonato, che scorrendo per tutto il resto della sua lunghezza, non potrà battere altra strada, e verrà al coperto in tal modo da qualunque deviamento, che potessero produrre li impreveduti movimenti dell' assistente, o dell' infer-

mo, o dell' operatore. L'aggiunta fatta al manico somministra un appoggio per cui può farsi una maggior forza, come è necessario quando incontransi ostacoli difficili da superarsi. Mi è avvenuto alcuna volta di dovere tagliare prostate assai dure, le quali presentando un obice superiore alla forza delle sole dita indice, pollice, e medio colle quali si tiene il coltello, m' obbligarono per superarlo a far urto contro l'estremità del manico coll' altra mano. A scanso degl' inconvenienti, che potrebbero nascere dal dovere in tale incontro impiegare ambe le mani credetti opportuna l'aggiunta del suddetto pezzo metallico, che mi dà un appoggio sufficiente qualunque sia la resistenza, che occorra di sormontare. Questi sono li cambiamenti, dell' utilità dei quali l' estesa mia pratica non permette, che io possa diffidare. Sarebbe non ostante temeraria troppo la lusinga di avere per essi messo colmo alla perfezione, che i più illustri chirurghi procurarono nello scorso secolo alla litotomia. Una più estesa, e più lunga esperienza potrà sola dar peso ed autorità a questo processo operativo col confermarne la proposta utilità.

SPIEGAZIONE

delle Figure della Tavola I.ª

Fig.ª I. *Coltello per la litotomìa.*
A *Medietà della parte convessa.*
BB *Parte convessa tagliente.*
CC *Parte concava, e dorso del coltello.*
D *Porzione tagliente della parte concava.*
EE *Manico.*
Fig.ª II. *Sciringone veduto di fianco onde rappresentare il grado di curvità, che deve avere.*
FF *Convessità scannellata.*
Fig.ª III. *Sciringone veduto in prospetto, e rettilineo per meglio rappresentare la sua scanalatura, ed il manico.*
GG *Scanalatura del sciringone.*
H *Estremità chiusa.*
II *Manico.*
K *Principio del manico un poco curvo.*
Fig.ª IV. *Rappresenta la maniera nella quale deve l' operatore tener in mano il coltello nell' atto dell' operazione.*

SPIEGAZIONE

delle Figure della Tavola II.ª

Fig.ª I. *Sciringone veduto di fianco.*

Fig.ª II. *Sciringone rappresentato retto per farne conoscere la sua scanalatura.*

LL *Scanalatura del sciringone.*

MM *Porzione ove la scanalatura del sciringone è assai larga.*

NN *Porzione ove la scanalatura del sciringone si ristringe accostandosi le pareti della medesima superiormente rivolgendosi una contro l' altra per chiudere la testa acuminata del coltello.*

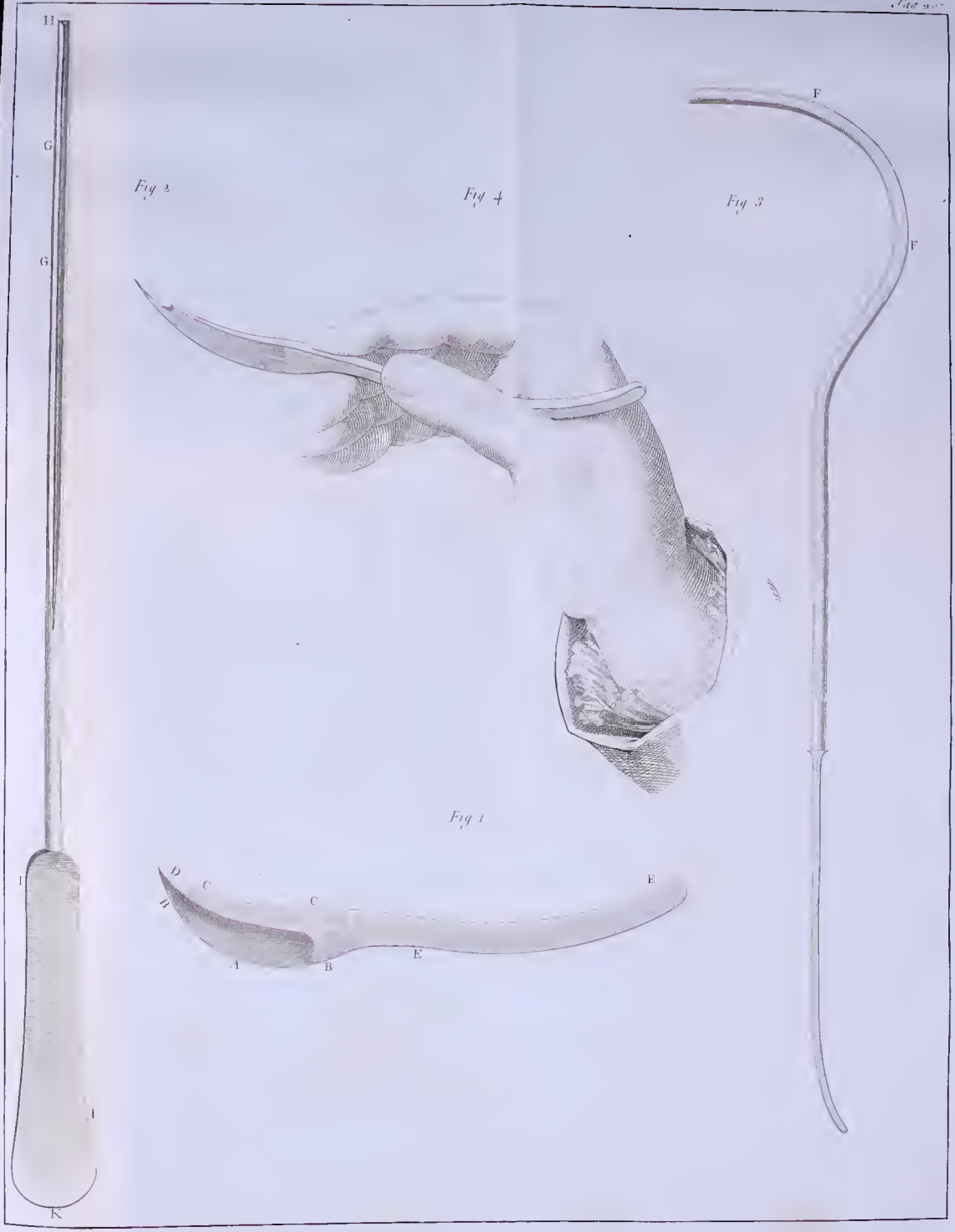
Fig.ª III. *Litotomo.*

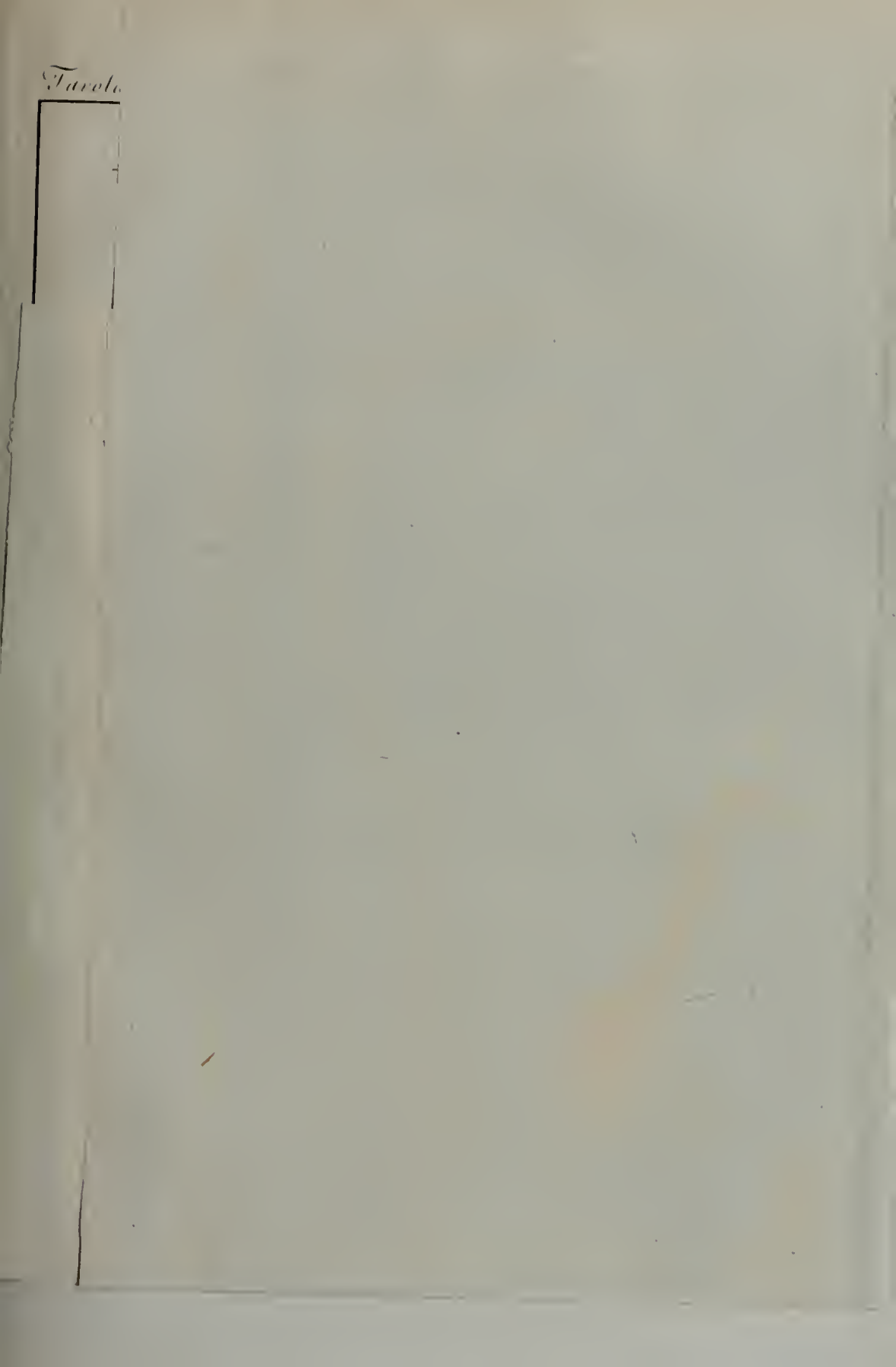
O *Testa acuminata.*

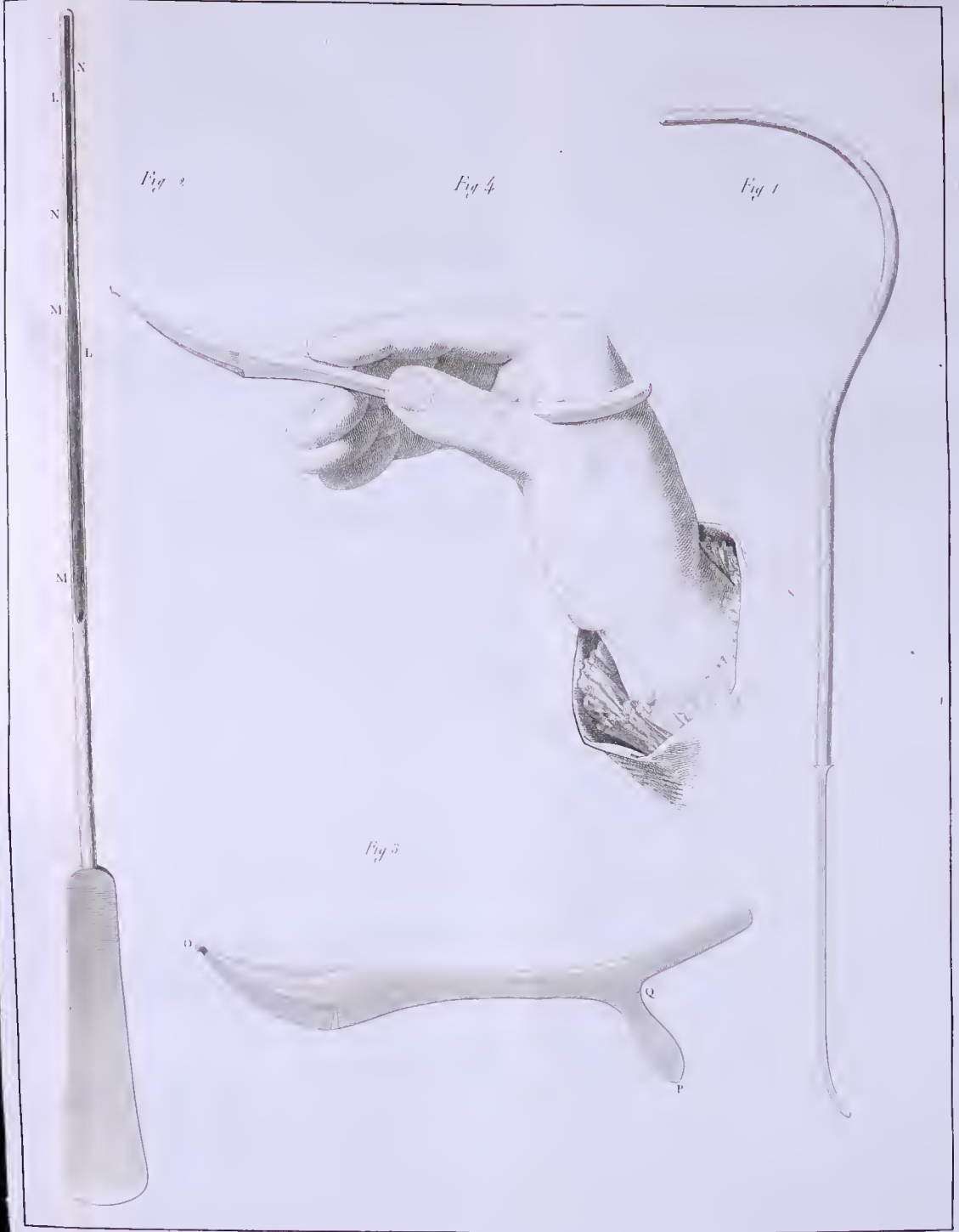
P *Coda.*

Q *Angolo ottuso, che forma la coda coll' estremità del manico.*

Fig.ª IV. *Spiega il modo di tenere il litotomo.*


H
G
G
I
K
Fig 2
Fig 4
Fig 3
F
F
Fig 1
D
C
B
C
E
A
B
E




N
L
N
M
L
M
Fig 2
Fig 4
Fig 1
Fig 3
O
Q
P

ESAME

Di un articolo della teoria del suono

DI MICHELE ARALDI

presentato a' 15 di gennajo. 1808

Nelle naturali scienze interviene talvolta, che una teoria, comecchè giusta e solida e luminosa, tragga non pertanto a conseguenze che non ottengono il suffragio dell'esperienza quanto almeno bramerebbono i Fisici. Di questa specie di conflitto tra il fatto e la teorìa un esempio noto e illustre ci si offre nella determinazione della velocità del suono; della quale ognuno sa al presente, che qual fu fissata dal Neuton, scostasi sensibilmente dal vero. Nè per questo niun fondato sospetto già non cade su la solidità de' principii impiegati dal sommo uomo; il quale anzi previde la discrepanza accennata, e ne additò apertamente la cagione e l'origine nella eterogeneità del fluido atmosferico ingombro sempre di sostanze, che concorrendo a renderlo più denso, non partecipano alla elasticità dell'aria vera, che sola serve al trasporto del suono. Da questa condizione, non avendo dati onde sugget-

tarla ai calcoli e alle misure, ei si fece lecito di prescindere, e fu contento di farne menzione colla consueta sua precisione e brevità. Poichè i meri cenni di un uomo tale ben meritano che altri si arresti a commentarli, fra quelli che riguardo a questo si accinsero a farlo vuolsi distinguere l'acuto Lambert, a cui debbesi di averne fatto toccar con mano, come tenendo conto della eterogeneità dell'aria, sgombri ogni paradosso, e la teoria venga posta d'accordo col fatto. E ben del lavoro dell'accademico di Berlino mostrasi soddisfatto il Neuton di questi tempi, il nostro Lagrangia, che ad esso rimettesi e lui solo cita nella sua Meccanica analitica: intorno a che per altro mi credo tenuto ad avvertire, che Lambert forse pigliossi una fatica piuttosto lodevole che necessaria dopo i rischiaramenti recati a questo stesso luogo della dottrina del suono da Giordano Riccati nell'aureo suo libro su le corde elastiche. Il perchè confesso che peno alquanto a comprendere il motivo che ha indotto uno de' più illustri Matematici che ci viva al presente, a proporre un suo tentativo di spiegazione di un fenomeno, intorno al quale pareva che omai potessero i Fisici cessare di travagliarsi. Meno poi comprendo come non manchi chi degli sforzi anteriori non tien conto veruno, e sparlandone come di mere ipotesi, si restringe a far menzione delle idee dal Matematico franzese avventurate modestamente, com'è proprio de' grandi ingegni e nell'aspetto di semplici congetture. E per tali sono io in fatti persuaso che questi le ritenga tuttavia, dopo anche il rinforzo o l'ornamento piuttosto de' calcoli, co' quali un prode giovine Analista avvisa di

mostrare che potrebbero esse, ove si riesca ad ottenere i dati opportuni, salire al grado di vera e adeguata spiegazione. Egli è appunto di queste speranze, ch' io mi propongo di esaminare se sieno abbastanza fondate.

Nel tentativo di cui trattasi, si assume e ammettesi siccome un fatto dovuto, si dice, alla Chimica moderna, che non segue condensazione in un fluido qualunque aeriforme senzachè segua congiuntamente qualche svolgimento del principio calorifico, che innalzandone a proporzione la temperatura, ne aumenta pure l' elasticità. Or quando sorge e propagasi suono nell'aria, le molecole di questa per una serie di condensamenti e diradamenti successivi vengono accostate e allontanate. Nel momento dell' accostamento svolgesi qualche calore che si rappiatta in quello dell' allontanamento. Questo effetto si riproduce in ogni successivo tratto e punto del raggio sonoro. Allo sviluppamento del calore tien dietro qualche incremento nella elasticità dell' aria sopra il grado da essa naturalmente posseduto. E perchè nella espressione offertaci dalla teoria della velocità del suono entra l' elasticità dell'aria, è chiaro che detto incremento non debbe trascurarsi, chi pur voglia determinare esattamente quella velocità. Tenendone conto, e introducendolo in detta espressione, e riformandola quanto è mestieri, niente sembra tanto ragionevole, quanto il credere che si riuscirà a metter d' accordo la velocità del suono teorica colla reale. Spero di non aver punto, nel riferirla e restringerla, indebolita la nuova spiegazione. Mi si conceda ora dai valentuomini, a cui è dessa dovuta, di aprir loro qualche mio dubbio.

E prima confesso di non esser per anche intimamente persuaso che la compressione basti a spremer fuori de' fluidi aeriformi il principio del calore. Forse e senza forse mi espongo al rimprovero di fastidioso, rifiutando di arrendermi alle prove che se ne adducono. Pur ne chieggo altre più convincenti, senza eccettuar quelle sopra le altre a prima vista robuste, che ne reca l'ingegnosissimo sig. Biot. Questi col solo mezzo della rapidissima e subitanea compressione delle due arie vitale e infiammabile introdotte entro uno schioppo pneumatico, ottenne l'accensione delle due arie, la distruzion delle stesse, e la conversion loro in acqua con detonazione ed esplosion sì veemente che la canna ne crepò, e l'esperimento non fu disgiunto da pericolo. Benchè non della meschianza sola di queste due arie accoppiate nella proporzione richiesta a formar l'aria in sommo grado tonante, ma, per quanto vengo assicurato, dell'aria comune si avvera, che una subita veementissima compressione risveglia entro di essa calor tale, che basta ad accendere un corpo assai combustibile, un pezzetto di esca a cagion d'esempio immerso in essa, nell'atto dell'improvvisa compressione. Ma tornando all'esperimento del sig. Biot, questi ne dichiara semplicissima la teoria. Una compression rapida obbliga secondo lui, le due arie ad abbandonar molto calore, che svincolandosi, nè potendo disperdersi in un attimo, e innalzandone momentaneamente la temperatura, basta ad accenderle in questo stato di compressione. Queste ultime parole pare che alludano a qualche effetto, di cui sembri al sig. Biot, che in quell' incontro derivar debba dallo stato di com-

pressione. Esse non ponno essergli sfuggite a caso. Potrebbe sospettarsi che secondo lui debbasi tener conto dell' accostamento delle molecole di entrambe le arie, le quali molecole condotte dall' avvicinamento entro i limiti, nei quali l' affinità loro reciproca divien prevalente a quella delle stesse sopra il principio igneo, che già è stato dalla compressione spremuto in parte fuori dell' una e dell' altra aria, tutt' all' improvviso si uniscono in forma di particelle acquee, e scuoton da se il calore residuo, che sprigionandosi in un attimo produce la detonazione ed esplosione. Con ciò verrebbe la spiegazione ad accostarsi all' ipotesi di Berthollet. Ma il fatto è che il sig. Biot contento di accennare lo stato di compressione, si astiene dall' impiegarlo a spiegar l' accensione, di cui si restringe a dire che accade in seguito dell' alzamento della temperatura senza che si scorga con bastevol chiarezza come dependentemente dà questo innalzamento, o sia dallo sviluppamento di porzion del calore, debba tutto l' altro rimasto aderente alle arie, sprigionarsene in un attimo, com' è mestieri perchè queste ne svestan la forma, e prendan quella su le prime di una nebbia vaporosa, poi di acqua liquida. Probabilmente ei se n'è astenuto per una lodevol modestia, di cui egli giovine offre a me provetto un esempio che avrei dovuto imitare. Nè io in fatti intendo di aver fatto niuno sforzo, onde spinger oltre e compiere una spiegazione ch' egli ha creduto di dover lasciare incompleta. Ripeto anzi che non sono intimamente persuaso della solidità de' principii in essa impiegati; vale a dire che l' innalzamento della

temperatura sia dovuto allo sviluppamento del calore spremuto fuori delle vere arie.

Almeno vorrei prima, che si provasse che il calore, anzi che dalle due arie, non si svolge dal vapor acqueo, di cui chi sa come esse si ottengano, non può dubitare che non esista nelle stesse, e del quale parmi dimostrato che a misura che trovasi costretto a condensarsi oltre i limiti corrispondenti ad ogni grado di temperatura, si decompone in parte tostamente, cioè sveste l'abito di vapore e prende quello di acqua, scotendo congiuntamente da se e in libertà lasciando il calore, che sollevando rapidamente la temperatura, mette l'aria infiammabile per se stessa combustibile quando è mista alla vitale, in istato di accendersi subitamente; donde la distruzione dell' una e dell'altra, e lo sprigionamento rapidissimo del calore combinato dianzi in entrambe chimicamente e per modo che non poteva già svincolarsene nè in tutto nè in parte per la semplice compressione. Non pretendo che questa spiegazione, in cui viene impiegato il calore spremuto fuori del vapor acqueo, meriti preferenza sopra l'altra. Parmi solo, che converrebbe recare i motivi onde escluderla. A buon conto non ha quasi luogo a dubitare che il riscaldamento nato nel calcio dello schioppo pneumatico quando entro di esso l'aria è compressa gradatamente e con qualche lentezza, non derivi dal condensamento e dalla decomposizion successiva del vapor acqueo che in fatti raccolto in tale incontro in forma di umido fa mostra di se sulle pareti interne di quella cavità: il che se è vero, qual maraviglia che una compression rapidissima possa mo-

mentaneamente produrre tal grado di riscaldamento che basti all'accensione di una sostanza qual è pur l'aria infiammabile per se stessa combustibile, e a cui oltre a ciò per la presenza dell'aria vitale accoppiata ad essa, particella con particella, non manca la condizione ad accendersi? Forse a porre in chiaro se il riscaldamento sia dovuto alla compressione della sostanza stessa delle arie impiegate, o a quella del vapor acqueo, qualche lume otterrebbesi dal suggettare ad una rapida compressione arie condotte dianzi al massimo grado di secchezza, valendosi all'uopo delle note industrie di Saussure o di de Luc. Oso proporne l'esperimento. Ove procedendo nel condensamento con qualche lentezza nè sorga riscaldamento, nè niun indizio pure di umido su le pareti interne del cavo, confesso che peno a credere che per una compressione comunque rapida sorgesse accensione.

Ma tornando al suono, prego i signori Laplace e Biot a far meco una osservazione. Essi a render ragione dell'incremento nell'aria della elasticità impiegano il calore che la compressione spreme fuori dell'aria stessa, e che divenendo calor sensibile, ha forza di espanderla. Va bene: ma questo calore aderente dianzi alle molecole delle arie concorreva a dare alle stesse quel grado preciso di elasticità ch'esse possedevano. Direm noi, che perdendo questo calore, niun danno non ne soffra la loro elasticità? Non pare; giacchè l'intensione di questa deriva, come è detto, dalla presenza e copia di esso. Suppongasi che l'uscita ne proceda lentamente, cosicchè possa il calore dileguarsi a misura che svolgesi, nè niun innalzamento soffra la

temperatura delle arie regolarmente e gradatamente compresse. In simil caso pare che dovrebbe in esse scemare l'energia primitiva delle lor molle; e conseguentemente, che non potrebbe l'elasticità conformarsi esattamente, e rimanere proporzionale alla densità. Or ciò si oppone all'esperienza. Si compiacciano i valentuomini di soddisfare a questa istanza, e mi permettano di passar oltre e accostarmi anche più da vicino al mio assunto.

Nell'ipotesi recata a spiegare col mezzo del calore la differenza, per cui la velocità reale del suono supera quella che resulta dalla teoria, temo assai, che vengano dimenticati i diradamenti reali sofferti dall'aria sonora, e in essa uguali precisamente ai condensamenti. Pare che si concepisca che lungo il raggio sonoro colle costipazioni alternino diradamenti, pe'quali le particelle aeree riacquistino soltanto l'ordinaria lor densità. Ammettendo ciò, s'intenderebbe come un lieve ma real grado di calore accompagnar possa la produzione del movimento sonoro. Ma questo concetto non sembra esatto. Colle costipazioni alternano diradamenti reali oltre i limiti dell'ordinaria densità dell'aria; e questi reali diradamenti debbono riguardo al calore produrre un effetto opposto a quello che si concepisce prodotto dalle costipazioni. Si concepisca che una corda tesa vibri: è dessa attorniata di aria elastica. Vibrando la corda, se l'aria è compressa per l'urto da ponente a levante, non può non dirarsi nell'opposta direzione da levante a ponente. Dando addietro la corda, accadono in senso opposto quinci diradamenti, quindi costipazioni; e sì gli uni, che le altre, poi-

chè una legge conforme regola lungo il raggio sonoro i movimenti delle molecole aeree, non ponno non proseguire ad avvicendarsi. E' impossibile che ciò non si avveri, perchè deriva dall'essenza stessa della elasticità. Dell'aria e del suono si avvera ciò che osservasi di qualunque corpo elastico e vibrante, di una campana che percossa vibra in guisa, che le sue sezioni circolari divengono alternamente elittiche in direzioni che tagliansi normalmente.

A togliere ognora meglio di mezzo i dubbii gioverà allargare alquanto questa osservazione. Vibrando la corda, ogni suo punto si accelera, finch' essa non è giunta a porsi in linea retta; e accelerandosi congiuntamente le particelle aeree da essa spinte immediatamente, poichè il movimento passa successivamente da esse ad altre, e da queste ad altre, cresce successivamente la costipazione delle fibre aeree situate presso la corda e ogni suo punto. Giunta essa col porsi in linea retta alla metà della sua vibrazione, per l'impeto concepito trascorre oltre con movimento ritardato. Le particelle aeree che confinano e combacian con essa, già per questo non l' abbandonano, perchè congiuntamente a motivo della elasticità dell'aria e della costipazione è nata ed agisce sopra ognuna d' esse una forza acceleratrice, per cui, mentre il movimento viaggia oltre ad altre ed altre molecole, le prime soffron ritardamento conforme al ritardamento della corda. Però nelle fibre aeree che co' punti di essa confinano, scema la costipazione; e al fine della vibrazion della corda non ponno esse queste fibre non trovarsi condotte allo stato della ordinaria lor densità. Dando

dunque addietro e reciprocando la corda, non ponno esse non diradarsi oltre ai limiti di questa stessa ordinaria lor densità. Lungo il raggio sonoro ogni particella è successivamente agitata colla stessa legge; e le vibrazioni d'altronde sono brevissime. Dunque in ogni tratto comunque breve del raggio sonoro coesistono costipazioni e diradamenti; e se per le prime debbe svolgersi calore, per i secondi debbe abbassarsi e nascondersi; cioè debbono questi effetti elidersi a vicenda. Se il sig. Biot avrà la compiacenza d'introdur ne' suoi calcoli questa osservazione, mi lusingo ch' ei troverà che nell'aria sonora non può sorgere niun innalzamento di temperatura.

Sebbene non ne sia mestieri, pur a rafforzare quanto ho detto mi si conceda di recare un altro argomento. Parmi che l'ipotesi de' Matematici franzesi venga di un modo niente equivoco a contrasto col fatto e coll'esperienza. Questa c'insegna che viaggiano non solo equabilmente, ma con eguale velocità il suono grave e l'acuto, il forte e il debole. Messa da parte la differenza fra il grave e l'acuto, scelgansi due suoni identici riguardo al tono, diversi riguardo alla forza. Viaggiano entrambi con velocità eguale; cioè sono egualmente estesi i così detti polsi dell'uno e dell'altro; nè la cosa può essere altrimenti; giacchè le vibrazioni d' ogni molecola aerea successivamente agitata sono nell'uno e nell'altro suono di eguale durata. Or al suono più forte corrispondono vibrazioni più estese; e l'increspamento o sia costipazione dell' aria compresa in un polso di eguale lunghezza non può non esser maggiore: conseguentemente dovrebb'esser maggiore lo svol-

gimento del calore, e con esso come l'incremento nell'elasticità dell'aria, così della velocità del suono; cioè la lunghezza de' polsi non potrebbe rimanere la stessa all'opposto di ciò che l'esperienza ne mostra.

E quì non mi si vieti d'interporre una breve digressione suggeritami dall'argomento. Perchè mi credo tenuto a farmi incontro a un equivoco che potrebbe affacciarsi ad alcuni nell'aspetto imponente di un vero dubbio. Si crederà forse taluno in diritto di chiedere come accada, giacchè non ha dubbio che ogni suono non viaggi con eguale velocità, e che di due suoni unisoni riguardo al tono, diversi nella forza non può per l'una parte non avverarsi che uguale è il numero e la lunghezza de' polsi sonori ad entrambi corrispondenti, mentre per l'altra al più forte corrispondono senza fallo nelle molecole aeree vibrazioni più estese, e conseguentemente una costipazione alquanto maggiore che non nel più debole, come, dico, accada e debba intendersi che quest'ultima condizione sussista colla prima, nè contribuisca a rendere i polsi alquanto più lunghi, e il viaggio del suono a proporzione alquanto più rapido. Chi movesse questo dubbio, mostrerebbe di non avere afferrato lo spirito di quel metodo per tutti i titoli esatto e legittimo, che impiegò Neuton nella ricerca di alcune delle principali affezioni del movimento sonoro, qual è concepito dall'aria. Appoggiasi egli ai dati offertigli dalla natura, pe' quali siam certi 1°. che il suono viaggia equabilmente; 2°. che ogni suono è veloce ugualmente: donde sorge la conseguenza che di due suoni eguali riguardo al tono, diversi nella forza, le onde, i polsi sonori sono lun-

ghi egualmente, e tali mantengonsi fino a quella distanza, in cui riescon sensibili. Quest' ultimo ne mostra che le molecole aeree conformansi nel vibrare alla legge de' pendoli cicloidali; la qual legge può assumersi come un nuovo dato offertoci dalla natura. A questa legge Neuton accoppia l'ipotesi che ogni vibrazione sia pochissimo estesa, e possa aversi in conto di minima fisicamente rimpetto al viaggio simultaneo del suono, cioè rimpetto alla lunghezza d'ogni suo polso. Nè questa ipotesi niuno vorrà certamente dichiararla illecita, solo che avverta che senza di essa, cioè senza ammettere che ogni polso sia incomparabilmente più esteso delle corrispondenti vibrazioni delle molecole aeree, non si potrebbe intendere come il suono sia sì rapido e scorra oltre ai mille piedi in un secondo. Potè però senza scrupolo questa ipotesi, o condizione che voglia dirsi, introdursi dall' inglese filosofo nella sua soluzione; e piuttosto il torto lo ebbe il Cramer a dimenticarla e prescinderne in quella sua famosa obbiezione. Poste le accennate condizioni essenziali al problema propostosi dal Neuton, ei si accinse a cercare non mica se l'aria dependentemente dalle proprietà in essa riconosciute dai Fisici ammetta nelle sue molecole un movimento conforme alle dette condizioni, giacchè queste, avendogliele offerte la stessa natura, di ciò lo rendevan sicuro; non mica se dependentemente da quelle stesse proprietà la forza acceleratrice delle molecole aeree nell'atto che vibrano riesca proporzionale alla distanza dal punto medio delle lor vibrazioni, poichè anche ciò è compreso nelle condizioni assunte o più veramente postegli in mano dalla natura, ma sib-

bene si accinse, dico, a cercare di quella forza acceleratrice un valor tale, che gli schiudesse l'adito ad ottenere l'intento, a cui principalmente mirava, di determinare la velocità costante e uniforme del suono. Tale a mio avviso è il processo del Neuton, e in faccia a questa interpretazione dileguasi l'opposizione del Cramer; cadono a terra i dubbii del giovine Giovanni Bernulli; ingiusta è visibilmente l'accusa per cui Frisio osò dichiararlo infetto del vizio di petizion di principio; e sto per dire che poco fondata è pure la taccia di oscurità datagli dall' Alembert. Poichè nella espressione della velocità trovata dal Neuton non rimane complicata l'ampiezza delle vibrazioni delle molecole aeree, si vede subito, che la differenza de' suoni riguardo al piano-forte non debbe rendergli disugualmente veloci. Del resto confesso di non aver fatto quasi, che restringere quanto su questo proposito leggesi presso Giordano Riccati nella sua opera su le corde elastiche; lavoro insigne e non pertanto poco noto agli oltramontani, fra i quali non è salito alla celebrità dovuta ad uno de' più nobili Saggi di Matematica applicata, che vanti il secolo decimo ottavo.

Prima di chiudere questo esame, mi si conceda di manifestar la sorpresa in me desta dal modo, con cui si esprime l'autore meritamente celebre di un trattato d' altronde assai pregevole elementare di Fisica, là dove parla della spiegazione da me discussa. Ei la dichiara diretta a supplire ai difetti delle ipotesi finora recate a render ragione della differenza fra la velocità quinci assegnata al suono dalla teorìa, quindi scoperta dall' esperienza. In che consistono di grazia que-

ste ipotesi? nell' ammettere che l' atmosfera sia impura per sostanze d' indole diverse e fra loro e dall'aria, in cui nuotano, più o meno imbrattandola. Qual fatto più certo di questo? Della presenza nell' aria del vapor acqueo non ha dubbio veruno. Trascurerem noi oltracciò le tante altre sostanze, che in forme sì diverse sollevandosi dal Globo son ricevute nel grembo dell' atmosfera? la qual ne diviene non tanto, come già tempo dicevasi, un Caos, quanto per un concetto più giusto e più conforme alle vedute sublimi della natura, una specie d'immenso laboratorio, in cui probabilmente a motivo della sottigliezza e division somma di dette sostanze e de' movimenti incessanti che in quell' instabil soggiorno le rimescolano in mille guise, si effettuano le più fine e più elaborate combinazioni, onde formar gl' ingredienti richiesti a servir di sostegno e alimento ai tanti esseri organici e viventi, che popolano il Globo, e de' quali ben può dirsi che vivono e nell'aria e dell' aria. Eh che della presenza e abbondanza di queste sostanze la stessa vista sembra che ci assicuri. Se un fascio di luce venga introdotto attraverso di una camera oscura, non ne sfugge all' occhio il viaggio; nè solo lunghesso scorgonsi infiniti atomi svolazzanti, ma poichè il tragitto ne è uniformemente luminoso, è manifesto che i raggi ne sono verso l'occhio ripercossi da sostanze diverse dall'aria pura per se stessa diafana, diverse dal vapor acqueo per se stesso trasparente. Per me confesso di dubitarne sì poco, che trovo ragionevole il pensiero di quelli, che nella differenza fra la velocità teorica e la reale del suono ravvisano un dato, di cui sarebbe le-

cito di valersi all'uopo di determinare la proporzione fra la densità dell'atmosfera, e quella della sua parte pura e aerea e capace di servir di veicolo al suono.

CONSIDERAZIONI E DUBBII

su la compressibilità ed elasticità de' liquidi ed in ispecie dell' acqua

DI MICHELE ARALDI

presentati a' 15 di gennajo. 1808

Auguro alle poche considerazioni seguenti, che i Fisici non le dichiarino in tutto indegne della loro attenzione. Lo scopo a cui esse mirano, è di esaminare i motivi addotti comunemente a sostegno dell' opinione che l'acqua sia compressibile ed elastica. Questi motivi sono eglino quanto è mestieri, giusti, fondati? Sul valor vero de' principali fra essi, di quelli che maggiormente ottengono la fiducia de' fautori di questa opinione chieggo licenza di muovere qualche dubbio. E prima confesso che non senza vero rincrescimento è riuscita a voto ogni diligenza da me usata per procacciarmi l' opera di Zimmerman, di cui mi è noto che confida d' esser giunto con una serie di sperienze dirette, a mostrare che l' acqua, ove le si applichi una compression veementissima, ammette di essere sensibilmente costipata. Comprendo che mancando io

delle necessarie notizie su le cautele impiegate dallo sperimentatore contro le illusioni e gli equivoci, l'aprir dubbii sente di vanità e leggierezza. E non pertanto confesso che peno alquanto a concepire cóme comprimendo l'acqua entro tubi comunque grossi e rigidi, si riesca a separare l'effetto delle forze comprimenti su l' acqua da quello ch' esse attraverso all' acqua esercitano su i tubi, che senza dubbio tendono a dilatare; e da quello pure, di cui può sospettarsi che concorra a rendere più complicato il fenomeno, di qualche condensazione che sofferta nella sostanza loro dalle pareti del tubo contribuisca all'aumento della capacità, cosicchè rimanga incerto se la discesa dell' acqua debbasi soltanto e in tutto alla costipazione della medesima. E vaglia il vero, quella forza di cui si opina che giunga a restringere il volume dell'acqua, perchè non potrà costipare le pareti de'tubi? In queste è pur d' uopo riconoscere qualche attitudine a cedere; come ben mostra il caso di una palla metallica, che cadendo dall'alto snr un piano della stessa indole soffre ed esercita compressione, donde la forza che dispiegasi in quell' incontro e la ripercote verso l' alto. D' altra parte suppongasi che le pareti del tubo sien rigide sì veramente, ma sottili a un tempo quanto è mestieri onde cedere e crepare. Direm noi che prima di cedere non abbiano sofferta distrazion niuna? e se la soffrono quando cedono, perchè non dovranno proporzionatamente soffrirla quando non cedono?

Come con mio dolore sono costretto a metter da parte Zimmerman, così mi credo dispensato dall'arrestarmi con Mongez, che combatte per la compressibi-

lità ed elasticità de' liquidi in un suo scritto inserito nel giornale di Rosier. Solo ad allontanare da questa mia risoluzione la taccia di superba ne adduco uno o due motivi. Egli a cagion d' esempio sul bel principio appoggia il suo assunto all'autorità del Neuton, il qual dichiara comuni ai corpi tutti le qualità che non potendo divenire più o meno intense, sono state dall'esperienza scoperte finora ne' corpi stessi. Or della elasticità direm noi che non ammetta gradi, differenze; come non le ammettono l' inerzia, l' impenetrabilità, la mobilità, le altre qualità mentovate da Neuton? Vuol dire che Mongez accenna questa condizione, la cita, e nell' atto stesso la dimentica. Ei pure poco oltre pretende che senza l' intervento della elasticità verrebbe meno la legge della eguaglianza fra l'azione e la reazione; quasi che questa legge non emerga unicamente dall' inerzia, nè in altro non consista che nell' obbligare i corpi qualunque condotti ad agir gli uni su gli altri a soffrire in ogni incontro cambiamenti di stato eguali in opposte direzioni; donde si vede che si prescinde in essa dalla elasticità, e che anche supponendo i corpi molli e cedenti, non ponno essi non osservarla. Anche un po' più oltre egli chiede come potrebbero le molecole acquee, ove fossero sprovvedute di elasticità, manifestarla tosto che prendano la forma di vapore; quasi che fosse a lui noto, che nell'assumerla, loro non si accoppii qualche altro principio, l' igneo secondo molti, a cui debbasi la nuova proprietà. Dopo questi esempii confido di non aver torto nel mostrare qualche repugnanza dall'entrare in un esame, che altri me ne offrirebbe in buon dato della specie dei recati.

Però passo piuttosto ad esporre intorno alla supposta compressibilità ed elasticità dell' acqua e de' liquidi in genere alcuni miei pensieri, ne' quali, se per l' una parte non è impossibile, per l'altra non è a mia notizia che altri mi abbia prevenuto. Mi verrà conceduto, per quanto spero, di poter riporre la cagione d' ogni liquidità nell' azione del principio calorifico. Della solidità di questa dottrina una specie di fisica dimostrazione ci si offre nell' assorbimento di quel principio prodotto dal passaggio di qualunque corpo dallo stato solido a quello di liquido. In tale incontro porzion notabile di quel principio si nasconde entro il corpo, nè fa mostra di se negli effetti sensibili, co' quali si costuma di misurarlo. Perche ciò? perchè il detto principio, impiegandosi nell' effetto di liquefare e mantenere sciolto il corpo, non può impiegarsi nella produzione degli effetti sensibili che ne sono la misura. Qual prova può recarsi più diretta di questa a mostrare che nella liquefazione il principio calorifico interviene nel carattere di cagione efficiente e immediata? Se non è disdetto di penetrare coll' occhio della mente nel meccanismo arcano di questo grande fenomeno, sembra che mentre quel principio tronca i vincoli delle particelle integranti del corpo, queste reagiscano a vicenda sullo stesso, nè potendo più esercitar come dianzi le une su le altre l'affinità loro reciproca, rivolgansi ad esercitarla sopra il detto principio, e lo attutiscano in certa guisa e lo imbriglino; e però nel corpo che si liquefà debba esso precipitarsi dai corpi circostanti, e seguire in questi ultimi raffreddamento. Non è punto malagevole di valersi all' uopo tanto del con-

cetto comune su l'indole de'fluidi elastici, fra i quali è posto in grado eminente il principio del calore, quanto di quello che dietro i cenni di Daniele Bernulli se ne sono formati i tre grandi Fisici di Ginevra, Lesage, Deluc, e Prevost. Può tutto interpetrarsi acconciamente impiegando sì l'uno che l'altro concetto. Ben mi trovo costretto a metter da parte le idee, per le quali è sorto ultimamente Rumford a combattere la stessa esistenza del principio igneo; e le metto da parte, perchè fra gli altri motivi l'influsso manifesto del calore su la liquidità diverrebbe per me un vero e inesplicabile enimma.

Ritengasi dunque che la liquidità e anzi la fluidità sia opera del principio calorifico; e si passi ad osservare che presso i Fisici nell'idea genuina e legittima del liquido entrar debbe ch'esso si trovi in uno stato di attual divisione oltre ogni limite sensibile; tale cioè che le molecole integranti dell'aggregazion fluida sottraggansi ai sensi perfettamente. Senza ciò, o io molto m'inganno, o non potrebbe il concetto del liquido, qual se lo formano i Fisici, servire acconciamente di base a quello, che aggiugnendogli secondo il loro costume qualche astrazione, se ne formano i Matematici. A questi ultimi è disdetto a mio avviso di portar lo sguardo e arrestarlo su gli elementi ultimi, indivisibili, e per così dire non più fluidi del liquido. Esso è tale indefinitamente; e tale lo dichiarò il Neuton nella definizione per lui recatane degna per la sua precisione ed esattezza d'essere anteposta ad ogni altra. Senza tale avvertenza si esporrebbero gl' Idraulici al risico di paralogizzare per un motivo conforme a quel-

lo, per cui a un risico uguale si esporrebbe il Geometra che concepisse l' estensione formata di punti inestesi. Per simil modo presso i Fisici le molecole integranti del liquido sono incospicue; ed è a gran torto, che alcuni fra essi appellano e appoggiano al testimonio de' sensi le loro idee sulla forma globosa delle medesime, e citano gli esempii della forma sferica, a cui si conformano le particelle degli olii, del latte, e quella pure che l'occhio armato scopre nelle particelle rosse del sangue. Perchè riguardo alle prime mi duole di dover dire che per un turpe e imperdonabile equivoco vengono sbagliati per le molecole integranti o dell'olio o del latte minuti ammassi di queste molecole per se stesse incospicue, costretti a conformarsi in forma sferica parte dall' affinità reciproca di dette molecole, parte dall' uguaglianza di pressione da essi tutt' all' intorno sofferta. Riguardo poi ai globicini rossi del sangue oso dire che a torto questa sostanza è riposta fra i fluidi. Non è dessa tale a rigore, e trovasi soltanto intrisa e stemperata e sospesa nel siero sanguigno senza partecipare alla sua fluidità; come a cagion d' esempio a questa non partecipa la rena che intorbidi l' acqua di un fiume. Confido che niuno mi vorrà riprendere d'essermi alquanto arrestato nello sviluppamento della nozione della fluidità. Certo che essa non ne abbisogna presso i veri Fisici: ma il numero di questi è scarso rimpetto a quelli, che non cessano di parlarne della figura globosa delle minime molecole de' liquidi, e de' minimi contatti, che a motivo di questa figura permettono ad esse di cedere ad ogni minima forza. Non si accorgono essi, che adottando queste idee, rimane contaminata di

mere ipotesi una nozione quanto ninn'altra fondamentale, con danno gravissimo della Fisica. Chiederei loro volentieri se concepiscano che queste particelle perdano la figura loro nel passaggio dallo stato di liquidità a quello di solido; quando a cagion d'esempio nell'acqua la temperatura si abbassa al grado dell' agghiacciamento. Eh che sulla configurazione di quelle particelle non è lecito di pronunziar nulla dopo massime le scoperte sull'influsso del principio igneo, che indebolendo e quasi in tutto troncando i loro vincoli, le mette in quello stato di attual divisione, che costituisce l' essenza della liquidità. Ho detto quasi in tutto, nè l'ho detto irriflessivamente ed a caso. Perchè vuolsi avvertire che per questa divisione già lor non si vieta di esercitare le une su le altre qualche affinità. E' questa indebolita assaissimo, ma non tolta in tutto; di che ben ci assicura la forma tondeggiante che assumono le goccioline di acqua sparse massime sur un corpo la cui attrazione non turbi quella, per cui mirano a riunirsi le molecole acquee; il che pur vuol dirsi e del mercurio e di ogni altro liquido. A queste prove può aggiugnersi col chiarissimo sig. Deluc quella, che ci offre il vapor acqueo tutte le volte ch' esso condensato oltre ai limiti fissati per ogni grado di temperatura dall' ampiezza dello spazio è costretto a decomporsi in parte, e svestendo la sua forma, a riunirsi in minutissimi atomi acquosi, che spesso assai, ove le circostanze sieno propizie, nè turbino l'azion regolare quinci dell'affinità loro, quindi del principio igneo, che si svolge, foggiansi in picciolissimi palloncini occupati nell' interno di un'aria rara, e la formazione si effettua del così detto

vapore vescicolare *(a)*. E qui giova osservare che questo residuo di affinità fra le molecole del liquido già punto non nuoce alla proprietà essenziale dello stesso, a quella vale a dire, per cui cedendo ad ogni menoma forza, ponno esse cangiare le respettive loro posizioni. Esse nel cangiarle e scostarsi si accostano ad altre, passando dalla sfera di attività delle une in quella di altre: così accade che possano aversi in conto di nulla coerenti. Per quest' ultima osservazione rimane, se non erro, compiuta l' idea, che dobbiam formarci del liquido; riguardo a cui è omai tempo ch'io mi accosti al principale mio scopo.

Intorno a questo confesso di non essere in grado che di aprire un pensier solo diretto a dare alla controversia su la compressibilità ed elasticità de' liquidi e in ispecie dell'acqua, un aspetto forse un po' nuovo, e un po' diverso da quello che le si dà comunemente. Nel trattarla si suol prescindere dalla considerazione dell' agente, a cui debbesi ogni liquidità; da quella voglio dire, del principio calorifico. Or chi ne assicura che sia lecito di prescinderne? Per me confesso che ne dubito fortemente. A questo agente debbe il liquido e l' attual sua divisione oltre ogni limite sensibile, e congiuntamente quel determinato volume, che corrisponde in esso ad ogni grado determinato di temperatura. Questi due effetti vanno indivisi. Vuol dire che le forze dirette a costipare un liquido vengono a contrasto col detto agente, e gli vietano di espanderlo quanto senza ciò accaderebbe. Non mi è noto che la controversia siasi offerta a veruno sotto questo punto di vista. Suppongasi che un liquido riempia esatta-

mente del suo volume l'interno di un recipiente di pareti comunque salde, chiuso ermeticamente; e concepiscasi che se ne innalzi alquanto di un grado, per mò di esempio reomuriano, la temperatura. Direm noi che in simil caso la robustezza delle pareti vieterà al liquido ogni dilatazione? o pur ch'esse cederanno un tal poco? Mi giova lasciar tutto indeciso, e avvertir solo che a ridurre un liquido in un volume un tal poco minore di quello che corrisponde ad una temperatura cresciuta di un grado richiedesi quella stessa forza precisamente che gli vieterebbe di espandersi nel sollevarsi di un grado a quella stessa temperatura. Ripeto che non oso riguardo a ciò portar niuna opinione. Ben de' dubbii che ritengo parmi che i fenomeni de' liquidi sì quando essi mantengonsi tali, che quando si assodano, mi offrano fondati motivi. E arrestandomi sull'acqua, di questa è noto al presente, ch' essa giugne al massimo di condensazione, non mica quando è pronta a diacciarsi, ma sibbene quattro gradi circa reomuriani sopra il gelo; giunta ai quali e innoltrando il freddo torna essa ad espandersi per un incremento di volume, che diviene soprattutto sensibile nell' atto che assodasi in ghiaccio *(b)*. E' pur noto che in tale incontro dispiegasi da essa una forza pressochè irresistibile, intanto che il gelo nel formarsi squarcia talvolta i duri tronchi, e sollevasi sul dorso le case. E qui si osservi che in simil caso agisce una forza che dianzi appena faceva mostra di se bilicandosi con quella del principio calorifico. Essa consiste nell'attrazion reciproca delle molecole acquee che condotte a un grado determinato di accostamento, a motivo, per quanto pare, di

una certa loro *polarità*, prendono nel riunirsi posizioni tali donde deriva l'incremento del volume. E perchè la natura mai non procede per salti, anche prima che sorga vero ghiaccio, comincia il volume e la liquidità a scemare, e come parmi di aver letto presso il chiarissimo Pictet, una cotal tegnenza, che inviscidisce un tal poco l'acqua, ne annunzia l'imminente assodamento. A rendere il fenomeno alquanto più complicato concorre il bisogno, che ha il liquido di effondere fuori di se quella porzione del principio igneo, che rimanendosi entro di esso non gli permetterebbe di rappigliarsi. Svolgesi questo e nell'atto stesso dileguasi nascosto entro un po' di vapore, che in quell'incontro scappa fuori del liquido omai pronto a diacciare. Intorno a questo vapore, la copia del quale pare che pel motivo accennato debba essere alquanto maggiore nell'atto dell'agghiacciamento che non un po' prima, e molto più che un po' dopo, mi sia lecito di osservare che da questa particolarità forse deriva l'inganno preso da quel Fisico franzese, il quale opinò che maggiore sia lo svaporamento del ghiaccio di quello dell'acqua, fredda sì bene ma liquida tuttavìa. Parimente non mi sia disdetto di sospettare che nel bisogno di aprire colla subita formazione di alquanto vapore uno sfogo al principio calorifico soverchio allo stato di ghiaccio debba forse riporsi la cagione di quel singolare fenomeno, per cui l'acqua, non di rado, ove mantengasi immota, sostiene senza diacciarsi un freddo di alcuni gradi maggiore di quello che basta a diacciarla. Chi sa che però il vapore non ne esca, perchè lo strato di aria che combacia coll'acqua tranquilla, essendone

sazio, non lo ammetta entro se; ove, sopravvenendo qualche agitazione, le circostanze cangino, lo ammetta, e l'acqua rapprendasi subitamente. Ma è questa una mera congettura, ed io in vece di proseguire ad innestar digressioni l'una sull'altra, debbo piuttosto tornando al mio assunto osservare, che se l'acqua diacciando e congiuntamente crescendo di volume, dispiega una energia sorprendente, un'attività nulla inferiore, e maggiore anzi è d'uopo ammetterla nel principio calorifico; il quale non che a bilicarsi colla prima, ma riesce a vincerla, troncando ogni vincolo fra le particelle dell'acqua. Però non pare che con quest'attività aver possa proporzion niuna l'efficacia de' mezzi, cui ci è lecito d'impiegare, opponendogli alla forza di quel principio, onde impedire che l'acqua non si dilati, od obbligarla a restringersi in un volume minore di quello che corrisponda alla sua temperatura. Del resto ripeto che non intendo fuori che di addurre i motivi, pe' quali su questo punto rimango tuttavia nel dubbio e nell'incertezza.

Chi dubita della compressibilità dell'acqua, per poco non è costretto a dubitar anche della sua elasticità. Però mi lusingo che que' Fisici di gran credito e seguito, de' quali mi accorgo che si mostran disposti ad ammetter nell'acqua quest'ultima proprietà, mi permetteranno di rimanere anche su ciò alquanto dubbio e sospeso. E in realtà confesso che parendomi di possedere idee nette quanto basta, come del liquido, così della elasticità, peno assai ad associar queste idee e a concepirle coesistenti nello stesso soggetto. Non conosco che due specie di elasticità; l'una che meglio

direbbesi espansibilità posseduta dalle sostanze aeriformi, nelle quali consiste in una cotal tendenza, per cui mirano con assiduo sforzo a dilatarsi per una espansione che non conosce confini; l'altra, a cui converrebbe forse serbare un tal nome, propria de' corpi solidi e rigidi, ne' quali, ove le parti loro vengano o premute o piegate o distratte, sorge una forza, per cui tentano di rimettersi nello stato di prima *(c)*. Di queste due elasticità da me conosciute la prima non è compresa nell' idea del liquido; la seconda le si oppone e la esclude; giacchè palesemente in essa supponesi la coesione, nè, per quanto sembra, non è che una modificazione di questa. Ma quì dirà alcuno, che le cosiffatte considerazioni sentono del sottile e del sofistico; che io in esse do corpo alle astrazioni; che se il Matematico è tenuto a concepire il liquido in uno stato di attual divisione indefinita e illimitata, al Fisico è lecito di portar lo sguardo su gli atomi dell' aggregazion fluida, de' quali può avverarsi che posseggano proprietà conformi a quelle de' corpi di mole sensibile; che in somma vuolsi consultar l' esperienza, la qual sembra che dichiari elastica l' acqua. Quest' ammonizione ammette più risposte. Potrei pregare l' oppositore a riflettere che ne' corpi solidi e dotati di qualche più o men notabile rigidità ognuno che voglia pur rendere a se stesso ragione delle proprie idee, cerca e colloca la cagione della elasticità non nell' indole delle particelle integranti, ma nel modo della loro adesione. Cessando questa allo sciogliersi del corpo in liquido, pare che debba dileguarsi pure l' elasticità, di cui non è facile di concepire come sopravviver possa alla man-

canza della condizione che le serviva di appoggio. Ma è meglio, affinchè non paia ch' io torni alle sottilità, rivolgersi a vedere se l' esperienza e le osservazioni che si recano, bastino a troncare la controversia.

Fra queste osservazioni niuna è ripetuta più spesso di quella, per cui siam certi che l' acqua serve alla propagazione del suono. Ma è poi egli sì certo che quest'attitudine basti a provare che l' acqua sia e compressibile ed elastica? Suppongasi che il suono attraverso all' aria giunga all' acqua; o sia che il movimento sonoro, il qual nell'aria consiste certamente in una serie di condensazioni che avvicendandosi co' diradamenti delle molecole aeree, e succedendosi in retta linea formano il raggio sonoro, che questo movimento, dico, pervenga all'acqua, e in essa risvegli qualche commozione. E' chiaro che ai suoni, cioè ai movimenti diversi più o men rapidi ed estesi e frequenti delle molecole aeree potranno corrispondere commozioni diverse nell'acqua, cui la sua fluidità e cedenza ad ogni urto rende opportuna a concepirle. Come queste commozioni sorgono per l' azione del movimento sonoro dell' aria su l'acqua, così nate che sieno in questa, potranno nella circostante aria risvegliare con urti corrispondenti nella forza, rapidità e frequenza a quelli, da cui sono state prodotte, increspamenti sonori, tali cioè per cui sia lecito il dire che l'acqua colle sue commozioni è concorsa alla propagazione del suono. E come queste commozioni ponno sorger nell'acqua dependentemente dagli urti de' raggj sonori aerei, così non ha dubbio che non possano essere risvegliate in essa dalle oscillazioni di un corpo sonoro qualunque, che

vibrando la scuota. Or di queste commozioni siam noi certi che sieno della stessa natura di quelle che concepiscono i fluidi elastici gravidi di suono? Quale obbligo ha in ciò? niuno certamente. E' visibile che a guidare attraverso all'acqua il suono all'aria, basta che le giungano urti frequenti quanto è mestieri, onde concependo essa tostamente a motivo della sua elasticità successivi increspamenti, non manchi a questi nè la frequenza, nè gli altri caratteri richiesti a costituire nell'aria il movimento sonoro. Esso nasce in fatti nell'aria in mille incontri dependentemente da movimenti che nulla non hanno di comune con quello, che in essa producono; come quando la frusta del postiglione percotendola subitamente e costipandola, ne elice un suono fortissimo non di rado e acutissimo.

Prego rispettosamente i fautori della elasticità dell'acqua, e sopra gli altri il chiarissimo sig. Haüy, a voler dichiarare in qual modo da essi si concepisca, che a motivo della sua elasticità l'acqua trasporti il suono. Supporrem noi, che le particelle dell'acqua vibrino nella guisa de' corpi solidi e rigidi per un alternativo cangiar di figura? Secondo questa interpretazione converrebbe, poichè l'acqua trasporta ogni maniera di suoni, ammettere che quelle particelle fossero suscettibili d'ogni sorta vibrazioni. Ma questo chi dirà mai? Ammetterem noi nell'acqua più specie, e anzi una moltitudine senza numero di specie diverse di particelle opportune a trasportare quali un suono, quali un altro? Così la spiegazione, oltre alle sue proprie, rimarrà esposta alle difficoltà, che riguardo all'aria dichiarano insostenibile l'ipotesi di Mairan. D'altra parte il liqui-

do, attesa la cedenza e mobilità somma delle sue parti, è opportuno per gli urti qualunque, che a lui pervengano a concepir commozioni d' ogni maniera, e concepirle non nel carattere di oscillazioni e vibrazioni, nome che vuolsi serbare al tremolio de' corpi elastici, ma in quello sì bene di scosse e di ondeggiamenti, la frequenza de' quali adegua quella degli urti, da cui derivano. Nell' acqua alla mancanza della elasticità può egregiamente supplire la liquidità. I suoi increspamenti sono per vero dire diversi essenzialmente da quelli dell' aria, e non pertanto risveglieranno in essa questi ultimi, ove le rechino colpi frequenti quanto è d' uopo, vale a dire quanto quelli, che le recherebbero immediatamente le vibrazioni del corpo sonoro. Così senza l'introduzione di niuna ipotesi, e impiegando dati noti e certi, può a mio avviso interpretarsi il fenomeno. Egli è conformemente a queste idee, che a parer mio nelle sperienze istituite sott'acqua, fra gli altri da Nollet, giugne all' orecchio il suono a cagion d' esempio, di un campanello. A sentirlo, basta che attraverso all'acqua, vibri il campanello dentro o fuori della stessa, pervengano commozioni, che nella loro successione e frequenza adeguino quelle che l'aria gli recherebbe. E' pure in tal guisa, se non sono in tutto ingannato, che nell'intima region dell' orecchio ottengonsi le sensazioni proprie dell' udito coll' intervento dell' acqua che riempie la capacità del Labirinto, disposta ad uscirne in parte e rientrarvi per le strade scoperte dal chiarissimo Cotugno. Non è mestieri di concepire in quest'acqua niuna elasticità, per intendere com' essa riceva e rechi alla polpa del nervo acustico, di cui è tappezzata

internamente la mentovata capacità i colpi e le scosse che le imprime co' suoi tremori la base della staffa, in cui termina quella catenella ossea leggierissima, che raccomandata coll'altro estremo alla membrana del timpano trasporta verso l'interno le vibrazioni e percosse impresse a questa membrana dai raggj sonori. Per altro nella teoria del suono io incontro più luoghi per me coperti di nebbia densissima *(d)*. Tal si è quello della propagazione del suono attraverso i corpi solidi più o men duri e densi; di tessitura diversa; quali omogenei, quali no; soprattutto su la natura e le affezioni del movimento che per essi lo trasporta, e come ne ha di fresco informati il sig. Hassenfratz, ne rende il tragitto più rapido assai che non per l'aria. Concorre questa oscurità ad ammonirmi ognora meglio dell'obbligo impostomi da tanti altri motivi di astenermi dalle positive affermazioni e restringermi ai dubbii: nè in fatti le precedenti riflessioni ad altro non mirano, che a render ragione di quelli, pe' quali non sono per anche in tutto convinto che la facoltà posseduta dall' acqua di trasportare il suono, basti a dimostrarne la elasticità *(e)*.

Poichè in questa facoltà è riposto l'Achille dell'opinione da me chiamata ad esame, se sono riuscito a mostrare ch' esso non è poi di gran lunga sì formidabile, quanto si crede, potrei metter da parte le altre più deboli assai, che adduconsi a puntellarla; alle quali non ha l' obbligo di tener dietro chi massime non si è proposto che di muovere qualche dubbio. Pur mi arresterò un momento sopra una sola, all' oggetto anche di recare un esempio della facilità, con cui sono

i Fisici sovente tratti in inganno dalle apparenze che loro impongono e gli seducono a sbagliare per identici effetti analoghi soltanto per qualche fenomeno estrinseco, diversi nella loro cagione ed essenza. Sospetto che in un equivoco tale inciampino quelli che a favore della elasticità dell'acqua recano il rimbalzo delle gocciole di questo liquido, che gettate contro l'acqua ne sono ripercosse ad angolo, aggiungon essi, eguale a quello dell'urto. Mi spiego rammemorando la controversia che divise già tempo i Fisici su la spiegazione del fenomeno, per cui i ciottoli sottili e piani e lisci lanciati con una certa obliquità contro l'acqua, ne rimbalzano per salti reiterati anche, ove la superficie del liquido stendasi bastevolmente. Chi a spiegare il fenomeno ricorreva all'elasticità dell'acqua; chi era contento di quella del ciottolo, e la controversia bolliva indecisa, finchè l'illustre Spallanzani sopravvenne a troncarla, e a mostrare che in quell'incontro l'acqua non fa che cedere all'urto e avvallarsi un tal poco, e permettere al ciottolo di scender prima e salir dopo, e uscir dell'acqua strascinato dall'impeto, scorrendo per la concavità del poco profondo avvallamento. Nel far menzione di questa controversia e del suo termine, non ho inteso che di addurre un esempio delle illusioni in cui si cade, chi ascoltando di troppo le analogie, dimentichi le differenze. Perchè tornando al rimbalzo delle gocciole di acqua, questo per l'una parte ammette una interpretazione sensibilmente diversa da quello del rimbalzo de' ciottoli, mentre per l'altra si può in essa pure far senza della elasticità. Chi ne assicura che le gocciole urtando l'acqua

cedente al sommo per la sua fluidità, non la smovano e incavino un tal poco, perdendo l'impeto congiuntamente, e che l'acqua un momento dopo col rialzarsi e scancellare l'incavo non le scagli fuori di se? il qual effetto sembra che tanto più agevolmente possa ottenersi, quanto che prima di giugnere a percuoterla non hanno esse potuto nell'attraversar l'aria, non istrascinarla con seco e attorniarsene come di un sottilissimo invoglio che loro vieta di entrare a immediato contatto coll'acqua, e rimanervi sciolte e assorbite. Nè non pretendo già io che l'affare passi precisamente così: chieggo solo prove alquanto più robuste della elasticità dell'acqua; e che intanto mi si permetta di ritenere i miei dubbii. *(f)*

NOTE

(a) Ammetto l'esistenza del vapore vescicolare; nè rimpetto alle prove dirette recate da Saussure, giungono ad obbligarmi a porlo in dubbio le opposizioni mossegli dal chiarissimo sig. Monge in suo scritto inserito negli Annali chimici di Parigi, in cui egli, abbandonandosi, se oso dirlo, con qualche intemperanza alle congetture offertegli in folla dal suo fecondissimo ingegno, non ha quasi fenomeno atmosferico che non imprenda a spiegare. Lascio che a concepire in qualche modo la formazione di queste vescichette ponno forse assisterne i cenni e le idee proposte nel testo su lo svolgimento del calore, che imprigionato dianzi e latente nel vapor elastico, può divenuto libero colla sua for-

za espandente costringerne gli atomi a prendere nel riunirsi, la forma di palloncini. Ciò, dico, metto da parte, e osservo piuttosto che il Matematico franzese a fin di spiegare come i globicini acquei, non mica voti e vescicolari, ma sibbene massicci, che formano a parer suo la nebbia e le nuvole, possano rimanere a lungo sospesi nell' aria senza deporsi al basso, si vale di un paragone, di cui duolmi di dover dire, che zoppica palesemente. Egli immagina questi globicini attorniati di un sottilissimo invoglio di aria aderente al loro esterno, donde resulta un tutto che pel suo peso specifico minore rimansi sospeso, bastando a vietargli di scendere la resistenza dall' aria opposta ad esser divisa. Questo concetto ei lo illustra, recando il caso di un ago che collocato bel bello su la superficie dell'acqua, non di rado vi si arresta, e galleggia trattenuto dallo scendere da un sottile strato di aria, che gli è tutt' all' intorno aderente. Il fatto è certo, ma nulla non ha di comune con quello, che intendesi di rischiarare. A buon conto in quest' ultimo egli è nel seno dell'atmosfera, che nuotano i globicini; nel primo l'ago galleggia alla superficie dell' acqua, e se ne venga rimosso con forza e spinto al basso, non ha dubbio che, ove suppongasi che ritenga l' invoglio aereo, abbandonato a se non voli subito di nuovo alla superficie. Ma v' ha di più: perchè nell' uno di questi casi ci si presentano due sostanze di gravità specifica diversa, l' aria e l' acqua; nell' altro tre, l'aria, l' acqua, e l'acciajo. Com' è possibile che al sig. Monge sia sfuggita una differenza sì enorme che visibilmente non permette niun confronto fra i due casi? E' dessa tale,

ch' io mi sarei astenuto dal notarla senza il bisogno in cui sono d' indebolire alquanto l' impressione, che a danno dell' opinione da me adottata potrebbe fare sopra taluno un nome così autorevole.

(b) L' osservazione è bella e nobile, ed è comunemente creduta di fresca data; nè niuno in realtà ha sopra di essa più diritto del vivente celebre sig. Deluc. Pur non voglio ommettere di osservare ch' essa si offerse già tempo, o almeno non si sottrasse in tutto alla sagacità e oculatezza degli Accademici del Cimento. Essi descrivendo i fenomeni dell'acqua costretta a raffreddarsi e diacciare entro una specie di termometro aperto nell'alto, inferiormente immerso colla sua palla in un miscuglio di neve e sale si esprimono come segue. „ E per dirne più distintamente il successo è da sapere che nella prima immersione che facevamo della palla subito ch' ella toccava l' acqua del ghiaccio, s' osservava nell' acqua del collo un picciolo sollevamento, ma assai veloce, dopo il quale con moto assai ordinato e di mezzana velocità s' andava ritirando verso la palla, finchè arrivata a un certo grado non proseguiva più oltre a discendere, ma si fermava quivi per qualche tempo a giudizio degli occhi affatto priva di movimento. Poi a poco a poco si vedea ricominciare a salire, ma con un moto tardissimo e apparentemente equabile, dal quale senza alcun proporzionale acceleramento spiccava in un subito un furiosissimo salto..... „ . Da lì a poco aggiungono. „ In tutto il tempo che queste cose accadevano, si vedeva alle volte venir su per l' acqua de' corpicciuoli aerei o fossero d' altra più sottile sostanza..... e questa sepa-

razione non cominciava se non dopo che l' acqua aveva cominciato a prendere il freddo gagliardo „. Intorno ai principali fenomeni narrati in questo passo osservo che del primo sollevamento dell'acqua vuolsi senza fallo accagionare il restringimento della palla e del tubo, le cui pareti sentono le prime l'azione del freddo: il fenomeno, per cui l'acqua giunta al massimo abbassamento prima di risalire diviene o sembra al senso divenire stazionaria, ne mostra che la natura geometrizza in ogni incontro, e quanto il consente l' indole delle sostanze, su cui opera, conformasi alla teoria matematica de' massimi e de' minimi. Di quel rapido salto, e, come vien chiamato, furioso, per cui l' acqua omai vicina a diacciare lanciasi all' insù, sembra lecito di congetturare ch' esso sia dovuto al bisogno che ha dessa di liberarsi di porzione del principio calorifico soverchia alla natura del ghiaccio, la qual rimanendo entro di essa non le permetterebbe di rapprendersi. Sfoga essa nascosta entro un po' di vapore che formasi in quell' istante, e di cui forse ci sono indizio le bollicine vedute salire attraverso l' acqua. Qualche analogìa parmi di ravvisare tra questo fenomeno e quello, per cui quando nell' atmosfera sorge nebbia e vapore vescicolare, il principio calorifico, che da se scuotono gli atomi acquei nel riunirsi, afferra parte degli stessi, e ne riforma il vapor elastico, che colla sua forza espandente agendo su quelli che rimangon riuniti, concorre forse ad obbligarli a prender la forma di palloncini. Del resto col tratto citato non intendo già io di scemar punto il merito de' Fisici moderni, ai quali si crede dovuta la scoperta in esso accennata; molto meno di

spossessarne il celebre sig. Deluc, che su di essa, come ho detto, ha più diritto di ogni altro, e del quale anzi son certo, tale è l' opinione che tengo del suo nobil carattere, che non rifiuterà di mettere a parte della sua gloria gli Accademici fiorentini.

(c) Alle due mentovate specie di elasticità mi si concederà egli di aggiugnerne una terza, della quale per altro confesso che nell' essenza consente e coincide colla seconda, nè non ne è diversa che per una modificazione alquanto notabile aggiuntale dalle circostanze? A dichiarare il mio pensiero mi servirò dell' esempio volgare e quasi triviale di un tessuto di vimini, qual ci si offre ne' comuni panieri e canestri. Ognun de' vimini disgiunto dagli altri e abbandonato a se per la elasticità, di cui è provveduto, stendesi in retta linea, e piegato a forza tende a raddrizzarsi. Nel canestro o paniere intrecciansi essi e si ritengono e si assoggettano scambievolmente; e sono pure tutti annodati per modo che malgrado lo stato di tensione in cui trovansi, loro è vietato di svincolarsi, e l' arnese ritien la sua forma. Or chi sa dirne di quanti corpi naturalmente si avveri, che l'elasticità trovisi in essi modificata di una guisa conforme? vale a dire che le parti e fibre loro independentemente da qualunque forza estrinseca premente o stirante trovinsi in uno stato di tensione, che però non faccia per solito mostra di se, perchè rimanga ecclissata dal contrasto loro reciproco? De' legni, per dire di questi soli, e de' corpi legnosi è lecito di sospettarlo fortemente; ed io lo avverto per farmi strada ad aprire una mia congettura sul modo e su le cagioni di un fenomeno curioso assai, quello

cioè delle crepature, alle quali, per parte massime di certe specie di legni non a torto si opina che sieno esposti i vasi di vetro, quelli sopra gli altri, per quanto pare, che sono foggiati in forma di fiaschi ritondati nella parte anche, con cui posan sul legno. Temesi soprattutto la noce, la quale nell'opinione del popolo, come per più altri riguardi, così verso i detti vasi ha credito di malefica. Può congetturarsi che le cosiffatte crepature derivino da qualche colpo improvviso ricevuto dal vetro in alcuno de' punti, pe' quali combacia col legno; il qual colpo venga contro esso vibrato all' occasione di qualche subita scossa che può concepirsi sorger nel legno tutte le volte ch' esso improvvisamente mette uno di que' suoni forti qualche fiata e fragorosi, che non di rado odonsi partir dal medesimo. Di questi suoni e della subita commozione che gli produce, pare che possa accagionarsi l'azione dell'umido su le fibre liguee, le quali, nella noce massime, attesa la loro indole e il loro intralciamento nell' inheversene o nel prosciugarsi, si accorciano forse o si allungano così disugualmente, che a motivo dell'azion loro reciproca e del vario loro stiramento alcune fra esse tutt' all' improvviso vengono o a stracciarsi o a slogarsi per modo che sorge nel legno una subita e rapidissima commozione, donde e il suono concepito dalla circostante aria, e il colpo scagliato su qualche punto del vetro.

Per altro non intendo già io di abbracciare in questo tentativo di spiegazione i casi tutti di simili inaspettate e a certi riguardi strane crepature. Mi basta di avere accennata una forse non per anche avvertita

cagione che può recare ai vetri colpi pericolosi. Convengo che n' ha di quelli, a cui essa non potrebbe acconciamente applicarsi. Confesso eziandio che converrebbe conoscere alquanto meglio l' indole del vetro e della sua elasticità. Il sapere che in esso la fragilità va del pari coll'estrema durezza, non basta di gran lunga all' uopo di spiegare certi fenomeni singolari che hanno posto alla tortura tanti acutissimi ingegni, quello a cagion d'esempio, delle lagrime bataviche, che allo spezzarsi del sottil filo e piccinolo in cui terminano, si stritolano e vanno in minuzzoli; quello anche più portentoso delle fiasche bolognesi, che resistono alle percosse, nè ricevon danno gettate contro il muro, cedono bensì e crepano improvvisamente all'urto debole di un pezzetto di agata o di pietra focaja, lasciato cadere sul grosso lor fondo; e ciò che può parere anche più sorprendente, non crepano già sempre nell' atto dell' urto, a cui su le prime direbbesi che resistono, bensì trovansi rotte da lì a breve tempo, qualche fiata dopo circa mezzo minuto da che ne pareva omai trascorso il pericolo.

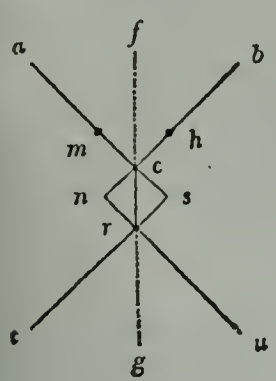
E' lecito forse di congetturare che al vetro anche competa quella modificazione dell'elasticità, cui ho chiesto poco sopra che mi venga conceduto di riconoscere in molti corpi. Uno stato di reale tensione forse non è disdetto di ammettere in esso e nelle parti e nelle fibre per così dire, delle quali, affine di assistere in qualche modo l'immaginazione ad afferrar questi oggetti, giova concepirlo composto; la qual tensione frenata nel vetro che conserva la sua integrità, e imbrigliata dal mutuo contrasto, si manifesta e prorompe in

effetti notabili tosto che per qualche anche lieve urto e sfregio e indebolimento che sopravvenga a qualche punto dello stesso, segua sbilancio tra forze dianzi equilibrate, donde in quel punto il rallentamento e il distacco delle particelle del vetro, cui tien dietro quello di altre e poi di altre, che rimanendo per simil modo ne' vincoli loro indebolite, e per simil modo staccandosi, permettono allo sbilancio di allargarsi estesamente, e alle fenditure di trascorrer oltre e allungarsi e moltiplicarsi rapidamente. Chi qualche ragionevolezza ravviserà nella proposta congettura, troverà pure non in tutto inverisimile che su la supposta tensione delle parti del vetro influir possano assai diverse condizioni, e fra le altre la diversa forma de' vasi; la grossezza maggior dove, dove minore delle pareti degli stessi nelle diverse loro regioni; la più o men grande prontezza con cui essi, dopo formati, si raffreddano, e congiuntamente si assodano e indurano. Affinchè poi non paja ch'io lasci questi sospetti o sogni che voglian dirsi, senza l'appoggio di qualche fatto, mi restringerò a dire, che alcuni prodi sperimentatori pretendono di essersi avveduti che un termometro posto sotto il recipiente boileano all'estrar dell'aria che cessa di premerne l'esterno, cresca un tal poco di capacità, di che ne avvisi l'abbassamento che segue in quell' incontro, del fluido rinchiuso; il qual si abbassa non già per raffreddamento, che gli sopravvenga, ma sibbene, per quanto affermano, a motivo della cresciuta capacità del tubo e della palla termometrica. Se ciò è vero, come tende a persuadercene la fiducia dovuta ai valentuomini, che nel narrare il fenomeno lo interpretano nel

modo accennato, nel vetro foggiato nella forma de' comuni termometri è d'uopo concepire una cotale tendenza a dilatarsi, che si bilichi col peso dell'aria, tolto questo, si manifesti. Donde sembra seguire che il vetro secondo le figure dategli nel formarne vasi, eserciti nelle sue parti qualche sforzo, che non si scorga finch' esso ritiene la sua integrità; emerga e si palesi tosto che per qualche forza raccolta su' pochi suoi punti, vengano questi tutt' all'improvviso a indebolirsi ed a cedere. Ma questi sospetti sono sì esili che non mi assicuro che meritino nè anche d' essere collocati in una Nota.

(d) Fra i luoghi della teoria del suono tuttavia ingombri di nebbia temo assai che debba riporsi anche quello della facoltà, cui l' esperienza ne insegna possedersi dall'aria di trasportare congiuntamente e recare all'orecchio netti e limpidi più suoni contemporanei, quali a cagion d'esempio odonsi entro una sala all' occasione di un concerto e partono da una moltitudine svariata di strumenti e di voci. Come si avvera egli che un suono non nuoce all'altro in un caso in cui sembrano inevitabili gl'incontri e gli urti e gl'incrocicchiamenti de' raggj sonori che da tutte bande concorrono e si affoltano all' ingresso dell' organo dell' udito? donde pare che dovrebbero rimanere turbati non poco i suoni corrispondenti. Il fatto sta ch' essi lungi di soffrirne nella purezza loro, giungono all' orecchio armonizzando colla dovuta esattezza. Più interpretazioni sono state date al fenomeno; fra le quali a mantener viva la memoria dell' ipotesi addotta dal Merano a spiegarlo, contribuirà il numero di quelli che sor-

sero a combatterla e a mostrarne l' insussistenza. La più recente parmi quella che un Fisico veterano e meritamente renduto celebre dal lavoro nobilissimo, per cui pare ch'egli meglio d'ogni altro sia riuscito a strappar di mano alla Natura il segreto delle cristallizzazioni minerali ha inserita di fresco in un suo trattato elementare di fisica. Anche di questa tengo qualche timore che non giunga a sciogliere il nodo perfettamente; e la stima altissima che professo al chiarissimo autore non mi trattiene, o più veramente mi anima a manifestargli i miei dubbii. Metto da parte il confronto da lui istituito fra gli effetti dell' urto de' raggj sonori e i movimenti composti quali in più casi si presentano all' occhio; del qual confronto comechè diretto ad aggiugner lume all' oggetto taluno potrebbe sospettare che addensi le tenebre anzichè diradarle. Mi arresto sul rischiaramento da lui colla fiducia di toglier di mezzo ogni dubbietà collocato in una nota, cui reputo meglio trascrivere intera qual leggesi nel libro citato. „ A fin di spargere un nuovo lume su questa spiegazione concepiscasi che $a\,c$, $b\,c$ rappresentino le direzioni di due raggj sonori incrocicchiantisi nel punto c, e che $m\,c$, $h\,c$ misurino l'estensione delle picciole oscillazioni che hanno luogo presso il punto di concorso. I movimenti dovuti a queste oscillazioni compongonsi nel detto punto in guisa che il movimento unico che ne resulta trasportasi alle molecole collocate immediata-



mente sotto c, e fa nascere in esse altre oscillazioni nel senso della diagonale $c\,r$ d' un picciolo parallelogrammo $c\,n\,r\,s$ determinato dalle lineette $c\,n$, $c\,s$, poste su i prolungamenti delle linee $h\,c$, $m\,c$ e uguali a queste ultime. Ora le oscillazioni secondo la diagonale risolvonsi nel punto r in due movimenti, l' effetto de' quali è tale che le molecole situate su le linee $r\,t$, $r\,u$ parallele l' una a $b\,c$, l' altra ad $a\,c$ sono sollecitate esse pure a concepir picciole oscillazioni uguali alle prime nel senso delle stesse linee $r\,t$, $r\,u$. D' altra parte lo spazio, in cui tutti questi movimenti si effettuano essendo quasi infinitamente picciolo, le linee $r\,t$, $r\,u$ sono sensibilmente nelle direzioni delle linee $b\,c$, $a\,c$, per modo che delle oscillazioni che hanno luogo nel senso di queste ultime può dirsi che si propagano ne' loro prolungamenti oltre il punto c di concorso. Però le resultanti di tutti i piccioli movimenti decomposti ponno aversi in conto di linee infinitamente corte, o di meri punti destinati a trasmetter soltanto questi movimenti senza cangiarne la direzione „.

A questo ragionamento non mi arrogo di muovere niuna positiva opposizione. Apro piuttosto e soltanto un mio desiderio. Bramerei di sapere per qual motivo il movimento composto, che dependentemente dall' incontro e urto delle due vibrazioni $m\,c$, $h\,c$ sorge nella particella collocata in c, ed obbliga questa particella ed altre poste nella diagonale $c\,r$ a vibrare nel senso di questa stessa diagonale, per qual motivo, dico, questo movimento composto debba nel punto r decomporsi, e proceder oltre nelle direzioni delle linee $r\,t$, $r\,u$, che per la brevità somma della diagonale $c\,r$ pon-

no aversi in conto di mere continuazioni delle bc, ac. Chi obbliga questo movimento a sciogliersi in due? Certo che non mancano particelle lungo le due linee rt, ru; ma non ne mancan nè anche lungo la linea rg continua alla diagonale cr: e non ha dubbio che se il movimento fosse giunto in c per la direzione fc, esso si sarebbe propagato nel senso della linea cg. Or quest'ultimo è il caso precisamente, in cui trovansi colla particella posta in c le altre situate nella diagonale cr, quando i due movimenti giunti loro per le direzioni mc, hc sonosi riuniti in un solo. Il supporre che due movimenti dopo che sonosi raccolti in un solo ritengano qualche disposizione a rivivere nella forma e direzione di prima, sarebbe un offendere troppo gravemente i principj della Meccanica. Ripeto, mi si adduca il motivo, per cui un movimento divenuto unico nel senso della cr, e che può proseguire ottimamente lungo la rg, debba scegliere di decomporsi e ricomparire nelle direzioni rt, ru: ove venga soddisfatto a questo mio dubbio o scrupolo, che voglia dirsi, mi dichiaro pronto ad ammettere la spiegazione proposta.

(e) Su questo articolo della elasticità de' liquidi duolmi di avere a fronte l' acuto Lambert, l' autorità del quale avrebbe forza d'intimidirmi, se non che nel por mente all' argomento principale e unico anzi da lui addotto scema il timore. In un suo lavoro imperfetto palesemente, siccome postumo, del quale può conseguentemente dubitarsi se, lui vivo, sarebbesi pubblicato qual leggesi negli Atti di Berlino dell' anno 1783, osserva egli che il celebre Daniele Bernulli inalzò l'in-

tero edificio della sua Idrodinamica sul principio detto della conservazione delle forze vive; del qual principio d' altra parte è noto che ad esso conformansi puntualmente gli effetti tutti che ne' corpi perfettamente elastici derivano dall' azion loro reciproca. In questa corrispondenza Lambert ravvisa una prova robusta assai della elasticità dell' acqua. Io mo confesso ch' essa non mi obbliga a rinunziare a' miei dubbii. Forsechè non s' incontrano casi in meccanica, ne' quali viene quel principio utilmente impiegato, mentre congiuntamente si prescinde in tutto dalla considerazione della elasticità de' corpi condotti ad agire gli uni su gli altri? Concepiscasi a cagion d' esempio che parecchi corpi, de' quali niente vieta che vengan supposti sprovveduti di elasticità, trovinsi infilzati in una verga che oscilli attorno di un asse. A determinare il centro di oscillazione di questo pendolo composto serve egregiamente il mentovato principio. Vuol dire che per ciò solo che ne sia utile il soccorso non ha in più incontri diritto il meccanico d' inferirne che sieno elastici i corpi, del movimento de' quali ei riesce a scoprire le proprietà e le affezioni. Chi assicura Lambert che ciò appunto non si avveri de' liquidi? e non emerga, mi si permetta di aggiugnere, dall' essenza loro? Ne tengo qualche sospetto, di cui per altro se ho il coraggio di annunziarlo e accennarlo alla sfuggita, non ho quello di arrestarmi a recarne i motivi. Mi ammonisce ad astenermene l' esempio e la circospezione lodevolissima di Daniele Bernulli, che fu contento di assumere il detto principio e porlo alla testa del suo insigne lavoro, in cui esso in fatti gli fruttò vantaggj tali che abbon-

dantemente giustificano il suo divisamento. Ben non voglio tacere che l' accademico di Berlino senz' altro non aveva notizia niuna de' dialoghi sulle forze vive di Vincenzo Riccati; opera eccellente e che non pertanto rimansi ignota agli stranieri e anche presso noi giace quasi dimenticata. L' argomento in essa è trattato non solo ma esausto; e nel leggerla e meditarla Lambert si sarebbe avveduto che ogni ulteriore fatica era per lo meno soverchia, nè nulla non rimaneva da spigolare in un campo omai compiutamente mietuto. Mostrasi in quest' opera come senza tener conto nè far niun motto della elasticità de' liquidi possa il principio della conservazione delle forze vive applicarsi utilmente alle ricerche idrodinamiche.

(f) Anche un'altra nota, giacchè ho potuto finalmente leggere il libro di Zimmermann; nè ho trovato in esso motivi che mi obblighino a ridirmi. Ponno a mio avviso i miei dubbii sussistere, nè forse me lo vieterebbe lo stesso Professore di Brunsvic, egli che in ultimo, malgrado la propension sua manifesta a credere l' acqua compressibile ed elastica, non è sì fermo in questa opinione da non credersi tenuto ad astenersi dalle assolute affermazioni; intanto che qualche fastidioso potrebbe chiedergli come quell'incertezza qualunque, ch' ei pur conserva, non lo abbia ammonito a dare al suo libro un titolo alquanto più modesto, che non quello che porta in fronte, nè sembra in tutto competergli, di Trattato dell' elasticità dell' acqua e di altri fluidi. Ma ciò mettendo da parte, ei soprattutto si appoggia ad alcune sperienze istituite collo strumento di Abich, efficace per vero dire quanto niun al-

tro immaginato fin ora, e cui ha creduto di render più energico col sostituire alle viti impiegate dall'inventore la forza di una leva. Gli è sembrato che l'acqua sottoposta al tormento di questa specie di torchio non rifiuti di costiparsi sensibilmente. Ei per pochissimo non se ne mostra persuaso; nè nasconde la sua inclinazione a crederlo, senza per altro giugner mai a dichiararsene certo. S'ingegna bensì di farsi incontro alle obbiezioni che potessero essergli mosse; e schierandosene d'innanzi parecchie, le più forti a suo avviso, ed esaminandole l'una dietro l'altra, di alcune si libera senza grave stento, di altre se ne lusinga: e perchè a dispetto degli sforzi estremi, onde satisfare anche a queste, rimane pure in lui qualche scrupolo, ei cerca di tranquillarsi col ricorrere e chiamare in ajuto certe riflessioni generali che leggonsi alla testa dell'opera. Intorno a che oso dire che queste riflessioni preliminari sono appunto la parte più debole del suo lavoro e più esposta agli attacchi. In esse non solo incontro ragionamenti un po' fiacchi, ma mi duole di dover dire che l'Autore ne indebolisce vie più la forza col mescer loro abbaglj manifesti. Tale per mo' di esempio è quello in cui egli dopo di averne informati che Nollet sentiva sott'acqua distintamente uno strumento sonoro scosso e toccato nell'aria, solo i suoni gli giugnevano all'orecchio alquanto indeboliti, aggiugne ne' termini precisi; che la differenza nella forza de' suoni non proporzionavasi già alla profondità dell'acqua soprastante; che due piedi sott'acqua lo sperimentatore distingueva lo stesso tono che quando non ne aveva sopra il capo che due once, e non mica un suo-

no di un'ottava più basso; dove si vede ch'egli sbaglia il tono per la forza, nè non ha presente che può un suono indebolirsi assai, e non pertanto rimanere alto egualmente nella scala de' toni. Sono pur questi equivoci gravi e bastevoli a giustificare la diffidenza che mostro verso un Fisico soggetto a commetterli.

In altro luogo egli, citando il Giornale enciclopedico, reca l'osservazione per cui il Cavaliere Servieres crede di essersi assicurato che in un termometro tenuto, come costumasi, nella posizion verticale, la colonna mercuriale è per una differenza da non trascurarsi più breve che non mettendolo nella orizzontale. Su questo fatto ei si restringe a dirne parergli impossibile che la mediocre quantità di mercurio chiusa nel termometro soffra dependentemente dal proprio peso compressione, cioè per quanto giova intendere, costipazion tale che la colonna ne rimanga sensibilmente accorciata. Ma chi gli ha detto che nè Servieres, nè verun fosse disposto ad interpretare di questa guisa il fenomeno? Io per me nell'ipotesi che qualche verità in esso rinchiudasi, confesso che avrei piuttosto ricorso a qualche aumento di capacità nella palla termometrica, prodotto dalla pressione del mercurio; la qual pressione è più efficace nel termometro eretto che nell'orizzontale, perchè proporzionasi, com'è noto, alla gravità specifica, e all'altezza entro il tubo del liquido e pesante metallo. I primi ad avvedersi che il vetro cede alcun poco, e si lascia piegare e distendere dal peso del mercurio, furono gli Accademici del Cimento; ed io cito volentieri la bella e parlante sperienza da essi recata a provarla, nè posso non istupir-

mi e dolermi di vederli in tanti incontri dimenticati. Poi se, come si è avvertito nella nota *(c)* col sollevare del peso dell' atmosfera un termometro posto nel recipiente boileano, sopravviene ad esso qualche dilatazione, per cui il fluido si abbassa, sembra naturale che un effetto conforme debba produrlo il peso del fluido stesso rinchiuso. E per simil modo se proseguendo il termometro a sostenere nel suo esterno il peso dell' atmosfera, sorga voto nel suo interno, dovrà restringersene la capacità, e il fluido rinchiuso salire e arrestarsi ad un' altezza un po' maggiore di quella, a cui senza ciò ascenderebbe: e poichè vuolsi detrarre l' effetto della pressione esercitata su la palla termometrica dal fluido rinchiuso, la detta altezza sarà, posto il resto pari, tanto maggiore, quanto è minore la gravità specifica del fluido stesso. Avverto ciò, perchè potrebbe darsi che questa particolarità, per cui i tubi termometrici si lasciano quinci restringere dal peso dell'aria, che ne preme l'esterno, quinci distendere da quello de' fluidi rinchiusi, non fosse stata nelle circostanze sue tutte valutata abbastanza dal sig. Canton fisico acuto e sagace quanto niun altro in quella serie di sperienze ingegnosissime, per le quali ei si fece a cercare fino a qual segno l' acqua tolleri d' essere costipata. Almeno, per quanto si raccoglie dal ragguaglio offertoci da Zimmermann, sembra che nè anche nell'inglese sperimentatore sorgesse sospetto che il mercurio possa col suo peso distendere il vetro. Ma non serve allungar questa nota; giacchè a ritenere i miei dubbii, sopra ogni altro motivo mi fa coraggio l'aspetto, forse, se oso dirlo, alquanto nuovo, in cui viene da me presentata la controversia.

DEL PARTO PEL BRACCIO

Di Gio: Batista Palletta

Ricevuta il dì 9 aprile 1808

Se gli scritti, che si pubblicano fossero tutti lavorati al tornio dell'osservazione, in poche pagine si racchiuderebbono le grandi ed utili verità, che voglionsi comunicare alle Società letterarie. Ora benchè io non mi trovi fornito del necessario discernimento per intraprender utilmente un' osservazione tal quale richiede una scrupolosa esattezza, mi sia permesso ciò non pertanto, che m'intertenga alcun poco sopra un argomento pratico appartenente all'Ostetricia, e che parli precisamente del caso, in cui il feto è male situato, e che presenta la mano, e l'antibraccio nell'atto del parto. Questa posizione del feto è forse la peggiore, che s'incontri in un parto preternaturale.

Non ignorano già i maestri, che dai Raccoglitori si è introdotta una cattiva pratica, che è quella di rimettere nella matrice il braccio del feto uscito fuori della vagina o solo, o unitamente al funicolo ombeli-

cale coll'intenzione di rendere il parto più spedito, e se fia possibile, naturale.

La mano, l'antibraccio, ed il braccio d'un feto, come pure il funicolo ombelicale possono sortire dalla vagina. In niuno dei mentovati casi l'introduzione delle suddette parti è utile, o necessaria; anzi si può dire essere impossibile quasi, e nociva. Imperocchè per fare la riduzione del braccio, o dell'antibraccio a dovere, conviene condurre si l'uno, che l'altro sino verso il fondo della matrice, e collocarli a lato del corpo del feto. Ora a tale maneggio si oppone la testa del feto medesimo, che d'ordinario trovasi vicina, ed occupante una porzione del passaggio; e vi si oppone la mano stessa del chirurgo, che non trova spazio per entrare a canto alla testa, o alla spalla del feto, quando ha impugnato il braccio, o l'antibraccio. E con simili tentativi si affatica inutilmente la madre, e si lascia sfuggire l'occasione per operare con frutto, e le vie naturali si vanno prosciugando intanto che s'indugia, si contrae la matrice addossandosi al corpo del feto, che perciò rimane come rinserrato in una borsa.

La maniera più commendata per ottenere un pronto e sicuro sgravio consiste nel far passare la mano dell'ostetricante lungo il braccio del feto, di farla avanzare nell'utero tant'oltre, che arrivi a prendere i piedi per effettuare il parto. Nè si può opporre difficoltà a tale operazione per la strettezza del luogo, sapendosi, che la vagina è capace di molta dilatazione. In qualche caso è bensì necessario di rispingere alcun poco il braccio, o il corpo del feto, onde potere più facilmente insinuare la mano nella matrice, il che riesce

più prontamente, quando i dolori sono deboli e rari, e lasciano luogo al raccoglitore di pensare alle risorse dell' arte. Ma non tutti si attengono a massime sì salutari, perchè sono imbevuti di principj del tutto opposti.

Conviene però confessare, che per comune sventura delle madri vi sono circostanze, nelle quali il raccoglitore non può effettuare il parto per i piedi. Il che avviene quando per negligenza, o per ignoranza delle levatrici il raccoglitore non è prevenuto a tempo opportuno, essendo già da lunga pezza colate le acque; quando l' utero ristrettosi di molto preme d' ogn' intorno sul feto; quando il braccio è sortito sino alla spalla, e che questa si è avanzata nella vagina; e finalmente quando le levatrici stirano indiscretamente il membro sortito, smuovono l'articolazione dell' omero, o strappano il braccio dalla spalla. In tali disastrose posizioni della madre, e del feto, sebbene alcuna volta sia ancora praticabile il rivolgimento, pure in alcune altre non ha potuto effettuarsi dai più esperti raccoglitori, o perchè l'utero fosse troppo ristretto, o perchè la spalla fosse troppo avanzata nella vagina, ed il braccio estremamente rigonfiato.

Molti fra i Pratici per trarsi dall' imbarazzo, in cui vedevansi posti dalla sorte, si appigliarono al crudele partito di mutilare il feto, sperando con questo mezzo di conseguire più facilmente l' intento, cioè di terminare il parto col rivolgimento del feto. L' esperienza però ha fatto vedere, che nè anche le replicate mutilazioni hanno conceduto un libero ingresso alla mano dell'ostetricante nell'utero, molto meno poi uno

spazio sufficiente al capo del feto per abbassarsi nella pelvi inferiore e constituire un parto naturale.

Il caso ci ha per avventura presentato l' artifizio col quale la natura suol terminare i parti di questa specie. Una donna in travaglio fu recata a questo spedale civile, sono già parecchi anni, dal cui pudendo pendeva fuori un braccio intiero del feto.

Era dessa stata per alcuni giorni mal trattata dalle levatrici, e ridotta allo stato di somma debolezza. Eravi urgente bisogno di passare all'estrazione del feto. Perciò mi accinsi tosto a ricercare i piedi portando la mano nell' utero più in alto che fosse possibile. Il tentativo fatto da me, e replicato da altri che mi assistevano, fu infruttuoso. In tale sfortunato incontro senza essermi prefisso alcuna regola volli agire, e preso il braccio pendente lo stirai moderatamente a misura, che i dolori che si erano rinnovati per l'insinuazione delle mani, ricomparivano. Dopo varie e lente stirature, ecco che la matrice espelle ad un tratto li due piedi, i quali da me afferrati compirono in breve il parto. Così la natura additò quasi il modo, col quale essa brama di essere soccorsa. In fatti mi si presentarono dappoi altri casi somiglianti, e l' evento fu il medesimo; e di alcuni di questi fu pure testimonio il mio Collega Prof. Monteggia, e ne valutò, siccome conviene ad un illuminato Pratico, le conseguenze che ne derivano a benefizio delle partorienti.

In aprile dell' anno 1807 fui chiamato per il parto settimestre di una donna, che aveva tre altre volte partorito felicemente. Quest' ultima gravidanza fu dalle altre diversa; perchè cominciò nel terzo mese a per-

der sangue in molta copia; perdita, che si rinnovò, e che fece conghietturare essere ella la conseguenza delle periodiche evacuazioni soppresse. Intanto si avanzò la gravidanza, e la donna si assoggettò a tutti li riguardi, e le cautele necessarie ad osservarsi in tale stato. Cinque giorni prima dell' imminente parto cominciarono a colare le acque in tanta copia, che esse pure indussero qualche dubbio sulla gravidanza, finchè nel quinto giorno si accoppiarono i dolori alle acque, si aprì la bocca dell' utero, e tutto si dispose per lo sgravamento.

Entrando in camera mi abbattei con altro chirurgo, il quale mi narrò, che essendo sortito il braccio dall' orifizio uterino, ed avanzatosi in vagina, aveva tentato due volte per avere i piedi, ma inutilmente, tanto perchè la spalla si era innoltrata di molto entro il collo uterino, quanto perchè l' utero addossatosi al feto si opponeva alla libera entrata della mano, ed alla ricerca dei piedi.

Dietro questa relazione introdussi la mano, e mi assicurai essere vero quanto l' altro ostetricante aveva esposto intorno alla situazione del feto. Ed in fatti passai a stento la mano nella cavità dell' utero, che era tutto serrato sopra il corpo del feto, e perfettamente asciutto, e non ostante qualche sforzo non potei valermi della mano per rintracciare i piedi. Come la mano era passata sopra la spalla, ed il dorso era rivolto in basso verso la vagina; così presi tosto il partito di stirare un poco il braccio sortito colla mia sinistra, intanto che colle dita indice e medio della destra piegate ad uncino procurava di tirare in basso il corpo

del feto. Questo maneggio non fu infruttuoso. Il corpicciuolo si smosse alquanto, e collo stirare a riprese cominciò a piegarsi ad arco, e giunta la convessità dell' arco presso la vulva vidi spicciar fuori ad un tratto le estremità inferiori, ed il corpo messo in linea uscì dietro brevi rivolgimenti laterali, conservando una vita languida, che poco dopo si estinse.

In questa sorta di parti ciò che deve attirare maggiormente l'attenzione del raccoglitore si è, che il giuoco pe' piedi succede tanto se il feto abbia la posizione naturale, cioè se abbia il dorso rivolto verso l'addomine della madre, quanto se lo abbia rivolto verso l'osso sacro della medesima. In amendue le posizioni il corpo del feto costituisce un arco, la di cui estremità anteriore è fissa, e coincide al punto della testa arrestata contro l' arcata del pube. L' estremità posteriore è mobile, ed è rappresentata dagli arti inferiori piegati sulle ginocchia, o dai tarsi che precedono, e che non possono avere un appoggio fisso.

Quando dunque il feto è rivolto col dorso anteriormente e verso il fondo dell' utero, e che l' utero da ogni punto preme sul corpicciuolo l' arco formato dal tronco del feto deve aumentarsi, e reagendo fortemente la estremità immobile dell' arco, tutta la forza di espulsione deve cadere sopra l' estremità opposta, ed avvalorandosi le contrazioni del fondo dell' utero sopra il centro dell' arco, debbono smovere l' estremità mobile, e spingerla fuori della matrice. Accade precisamente lo stesso, se la spina del feto sia in basso, o indietro verso l' osso sacro. Allora la spina si piega in senso opposto, e la convessità dell' arco è costitui-

ta dal torace, e dall' addomine, e le contrazioni uterine sopra l'arco ventrale portano i medesimi risultati.

Finquì ho esposto quanto ho potuto notare colla propria esperienza. Ma questi casi di sgravamenti fuori del modo ordinario avvengono non solo nelle città, ma ben anche nelle ville fra le contadine, ed è dove o non sono osservati, o sono le partorienti sì malmenate, che per lo più ne muojono. Tuttavolta non vi manca qualche sensato maestro dell'arte, che spinto dall' umanità metta in opra ogni suo sapere per arrivare a quel punto felice di liberar la partoriente dalla più penosa angoscia.

Un medico dell'esterno, al quale comunicai le mie osservazioni poc' anzi accennate, mi assicurò non essere infrequenti i parti pel braccio nelle contadine. E come i chirurghi o per la distanza dei luoghi, o per l'ignoranza delle mammane non sono mai avvertiti al principio del travaglio; così queste ne' casi di bisogno richiedono l' ajuto appunto nella situazione più deplorabile, cioè quando le acque sono da lunga pezza colate, ed il braccio che presentasi, si è tumefatto ed illividito. In questo stato di cose è sovente impraticabile l' introduzione della mano per operare il rivolgimento; ovvero il raccoglitore non si arrischia ad intraprendere un'operazione che può essere d'incerta riuscita o per mancanza d'ajuto di altro ostetricante, ajuto pur troppo necessario, quando la mano del primo operante è stanca ed intorpidita; o per disposizione delle parti contenenti il feto. In fatti dopo che l'utero si è sgravato dalle acque; dopo che si è serrato, ed addossato al corpo del feto, esso entra in una permanente contra-

zione, ed acquista uno stato di stenìa; stato in cui, volendosi prevalere della forza, seguono tanto prontamente le letali, e poco avvertite lacerazioni della matrice.

Il nostro operatore senza avere di mira altro principio fuorchè quello d'indebolire la robusta costituzione delle contadine si appigliò al partito di trar sangue. Egli supponeva, che rilassando le fibre del soggetto, l'utero si sarebbe reso cedevole e più obbediente alla mano del chirurgo. Alla prima visita si contentava di salassare copiosamente, indi se ne partiva. Un' altra abbondante emission di sangue era il frutto della seconda visita, ed abbandonava di nuovo per più ore la partoriente. Di rado abbisognava la terza emission di sangue, perchè giunto l'operatore al letto della donna vedeva con sua sorpresa essere seguita l'espulsione d'un feto morto dall'utero. Animato dal successo reiterato di tale pratica egli si fece un canone di stabilire la necessità di salassare per poco che sia difficoltosa l'intromissione della mano nell'utero, e di commettere tutto l'affare del parto alle forze della matrice.

Ora che è provato potersi terminare il parto in siffatta guisa senza ajuto d'arte, sarebbe in vero di molta utilità il sapere per quale meccanismo accada l'espulsione del feto. Riflettendo all'angustia delle parti femminili, ed ai complicati diametri della pelvi, egli sembra indubitato, che il meccanismo del parto sia tuttora involto in una grande oscurità. Da quanto si può scorgere coll'esame attento del travaglio i parti tutti non succedono già per via d'un'impulsione in *li-*

nea retta, effettuata dalla contrazione della matrice sul corpo del feto; ma sibbene per uno sviluppo successivo delle forze uterine a foggia di altrettanti segmenti di cerchio, quanti sono i diametri nel tratto, che segna il feto per il suo passaggio.

Ciò che si è finora esposto è conforme alla dottrina di Stein *(a)*, il quale partendo dalla originaria situazion del feto, per cui sta nell' utero colla testa in alto, e le natiche in basso, col dorso incurvato indietro, e la faccia rivolta in avanti, colle cosce piegate verso il ventre, e colle gambe piegate sulle ginocchia; le braccia anch' esse piegate, o distese lungo il corpo colla testa pendente sul petto in avanti, viene a stabilire, che il feto sta *rannicchiato in forma quasi rotonda*. Ma anche in tempo del parto, sebbene trovisi la testa in basso, e le natiche in alto, il feto è tuttavia rannicchiato in forma quasi rotonda col dorso incurvato in avanti, e la faccia rivolta indietro, di modo che il feto trovasi voltato per davanti all' ingiù, e per così dire *voltolato intorno al proprio asse*.

Contribuisce eziandio al parto in direzione *semicircolare* la forma estrinseca della testa, nella quale si notano due larghe *basi*, e due *apici*, le quali basi nel parto naturale sviluppansi e cangiansi di modo, che una passa nel sito dell' altra, quasi come per un *arco di cerchio*, mentre la testa si muove intorno al proprio asse. Di più il gran diametro della testa collocata nel piccolo diametro del catino durante il passaggio pel catino si perde in molti diametri *medj, obbliqui*, e quindi più piccoli, secondo i quali ella sviluppasi sotto il

(a) Arte ostetricia. Cap. VI. § 394 e seg.

natural parto quasi in un segmento di cerchio. Nè tale sviluppo è soltanto appoggiato ai varj diametri della testa del feto; ma altresì alla configurazione delle parti materne. Poichè la linea centrale del catino taglasi ad angolo acuto colla linea centrale del corpo; ed essendo la linea del catino obbliqua all' orizzonte, ne viene per conseguenza che anche l'asse del catino devii alcuni gradi dal piano perpendicolare *(a)*. E deviando l' asse del catino per certi gradi dal piano perpendicolare, anche la natural situazione del catino non può essere parallela ma deve fare un piano obbliquo coll' orizzonte.

Ma se più da vicino si considera la costituzione della pelvi, si troverà che il suo asse non potrebbe tutto stare in una sola *linea retta*; e che piuttosto consiste in una linea retta in alto, ed in un' altra in basso, le quali vengono ad unirsi ad angolo ottusissimo verso la metà della pelvi. E considerando ancor più attentamente questa disposizione, si vede, che entrambe le mentovate linee concorrenti in un angolo affatto ottuso, e formanti in tal maniera l' asse della pelvi trascorrono propriamente in una sezione di circolo, venendo indi l' asse della pelvi a descrivere una *linea curva*. Non altrimenti addiviene della linea centrale della vagina, la quale descrive del pari una *curva*, che si diparte sotto un angolo ottusissimo dalla linea centrale dell'utero.

Se dunque gli assi della pelvi, dell' utero, e della vagina non coincidono tra di loro, ma diverge cadauno dall' asse dell' altro; se ognuno di questi assi taglia gli altri ad angolo più o meno ottuso, segue, che

(a) Stein. Cap. III. § 58 e seg.

risulteranno molte *linee curve* in tutto il tratto, che percorre il feto per venire alla luce. La prima sarebbe quella della linea centrale del corpo tagliantesi obbliquamente colla centrale del catino. La seconda l'asse della pelvi composto di due rette unite ad angolo assai ottuso. La terza è la linea centrale della vagina, che ad angolo molto ottuso staccasi dalla centrale dell'utero.

Da ciò risulta, che a cagione degli assi non coincidenti, e quindi a motivo della conformazione delle parti genitali materne, la spinta in *linea retta* non può seguire sopra il corpicciuolo del feto, e che, se questa avesse effettivamente luogo, sarebbe di grave pregiudizio alle parti molli della madre, e le disporrebbe alla lacerazione. Ma la spinta in *linea retta* non si adatta neppure alla configurazione, che conserva il feto nell' utero; poichè la forma globosa del suo corpo è obbligata a seguire, e ad adattarsi alle curve, che descrivono le parti materne, e le forze impresse dall'utero seguono la curva del corpo diretto in basso. Per la qual cosa comprendiamo, come la testa del feto, che spinta in linea retta verrebbe a cadere perpendicolarmente sopra la sinfisi del pube, per via di un giro semicircolare cangi direzione, e adatti il maggior suo diametro al diametro più grande, e traversale del catino; ed il piccolo diametro della testa al minore del catino; indi come facendo un altro segmento di cerchio, ed oltrepassando la linea innominata il diametro grande della testa muti di nuovo posizione collocandosi tra l' arcata del pube, e la concavità dell' osso sacro; e finalmente come per una nuova curva diretta allo innanzi il capo superi l' arcata del pube, e venga

spinto in fuori, ed in alto, perchè se gli impulsi diretti fossero in linea retta, il capo verrebbe ad urtare contro la curvità del coccige, ed accadrebbe la lussazione di quest' osso, e la lacerazione del perineo.

Ma non è solo nel parto, che la natura osserva questo meccanismo. Molte altre escrezioni del corpo si effettuano nella sopraddetta maniera, cioè in linea curva. Niuno iniziato nell' arte ignora le mirabili circonvoluzioni, o curve, che forma il tubo intestinale. E pare veramente difficile, che le materie alimentari trovino passaggio pel duodeno doppiamente ripiegato, fisso a suo luogo, e non ciondolante come gli altri intestini tenui. Ma molto più difficile è il concepire, come le feccie dal cieco possano salire entro il colon, poco o non punto dotato di movimento vermicolare, e ritenuto da moltiplici vincoli, che gli conciliano una grande figura arcuata. Pure salgon le feccie, discendono, e non trovan ritardo, se non quanto natura chiede, nella ripiegatura dell' *S* romano, e giunte nel retto intestino parimente semicurvo vengono cacciate fuori dal corpo in direzione curvilinea.

L' uretra nel maschio non è retta sicuramente, nè giova che io mi arresti sopra la descrizione di una particella notissima agli anatomici. Quindi è evidente, che l' orina sortendo descrive quasi un' *S*, vale a dire una doppia curva seguendo la direzion dell' uretra. Altri canali escretori hannovi pure nel corpo, come il nasale, il cistico ec. che non affettano la linea retta; e lo spiegare se in essi le escrezioni si facciano per via curvilinea, e per qual motivo sieno stati per tal foggia costruiti è un' impresa, che appartiene ai più consumati Fisiologi.

DELLA VESCICHETTA OMBELICALE

Di Gio: Batista Palletta

Ricevuta il dì 9 aprile 1808

Hanno dato il nome gli Anatomici di *Vescichetta ombelicale* a quella intumescenza, o sacchetto, che s'innalza dal bellico dei più teneri embrioni, e fu da molti osservata in diversi tempi, e da pochi esattamente descritta. B. S. Albino oltre alla descrizione cavata dagli embrioni ci ha lasciate le più belle figure rappresentanti lo stato dell'ombelico nei tenerissimi embrioni *(a)*. Egli fa rimarcare che il bellico è continuato colle membrane dell'uovo; che l'amnios abbandonando il corion o prima, o presso l'ombelico si cangia in una sorta d'imbuto, che contiene lassamente la estremità del bellico; che in generale è grande la diversità del bellico e in lunghezza ed in grossezza ed in figura nei diversi embrioni; che però in tutti il ventre è tumidetto, e prominente dalla parte del bellico.

Lowrisberg *(b)* descrivendo un feto di dieci setti-

(*a*) Annot. Acad. L. I. Cap. 19; fig. 3, 4, 5; tab. V.
(*b*) Descriptio Anat. embryonis. obs. 2.

mane osserva, che il funicolo ombelicale era molto ampio, e che costituiva come il sacco d' un' ernia connata, veggendosi trasparire i giri di alcuni intestini tenui. Egli potè assicurarsi, che una porzione degli intestini tenui sortì per una grande, e distinta apertura esistente nella linea bianca. Questo stato del bellico si vede benissimo delineato nella figura 2, e 3 della tavola annessa all' operetta. Finalmente il chiariss. Blumenbach *(a)* dichiara enigmatica la vescichetta ombelicale umana, e di breve durata, perchè scompare dopo il terzo mese del concepimento, e quindi s' indusse a credere da prima, che tal particella fosse accidentale, o morbosa, o mostruosa. Ma di poi in un ricordo posto immediatamente dopo la prefazione allo stesso libro confessa la costante esistenza di detta vescichetta nei tenerissimi aborti, e che talvolta è sì piccola, che non appare ad occhio nudo, o che è necessario di ricercarla fra le membrane corion ed amnios a lato del funicolo ombelicale.

Avendo io fatto ricerca di aborti di diversa età, mi sono procurato il vantaggio di poterne notomizzare alcuni, e di fare indagini intorno a quella stravagante particella. Gli embrioni, che ebbi fra le mani, erano stati levati da donne gravide morte per malattia, altri rinchiusi nelle loro membrane caddero abortivamente fuori della matrice. Ho esaminati gli embrioni imperfetti, quelli cioè che hanno la testa bislunga, schiacciata, e ne' quali appena si ravvisa la fessura della bocca, e mancano le estremità del corpo. In questi la Ca-

(a) Instit. physiol. sect. XIV. § 579.

rina, o Spina dorsale è coperta di cute, la qual manca assolutamente dallo sterno sino alle ossa del pube. In luogo di cute estendevasi sopra le viscere addominali una sottilissima membranetta, attraverso la quale potevansi distinguere i giri, o rivolgimenti degli intestini pressochè mucosi ancora in tal epoca. Imperocchè gl' intestini ciondolavano quasi fuori dei limiti della cavità addominale propriamente detta, contenuti soltanto dalla sopraddetta membranetta, che lassamente gli ricuopriva. Le altre parti nell' imperfetto embrione sono tanto molli, che non si può stabilire alcuna cosa di certo.

Da questi passai all' esame di embrioni più maturi dai 30 ai 50 giorni dopo il concepimento. In tutti vedevasi il ventre prominente ed elevato a foggia di scudo, vestito di cute contenente le viscere. L' orifizio del bellico, pel quale escono gl' intestini, ritrovasi ora più ampio, ora più ristretto. La bolla, o vescichetta ombelicale nel tenero embrione è quasi sempre coperta da un tenuissimo velamento derivante dal peritoneo; nel feto più maturo poi vi si estende sopra il comune velamento, cioè la cute fino ai margini del funicolo. Questa funicella occupa per lo più la superior parte della bollicella, e le intestina si fanno strada entro la bollicella per un intervallo tra la vena ombelicale, e l'arteria sinistra, prima che questi canali si congiungano più strettamente per costituire il funicolo. Il fegato suol essere voluminoso, ed estendesi ai due ipocondrj, ed a tutto l'epigastrio fino al bellico. Talvolta ancora la maggior prominenza del bellico è formata dal fegato. Dietro il fegato, e verso la spina ritrovasi lo stomaco vuoto con uno degli orifizj in alto,

coll' altro inferiormente, ed i margini sono laterali, cioè il concavo a destra, il convesso a sinistra. Dall'orifizio inferiore discende il duodeno, e colla prima arcata tocca la vertebra superior de' lombi, indi piegandosi a sinistra sorte dall' addomine insieme al digiuno, all' ileo, ed alla massima parte del colon. L' ultima parte di questo canale rientra nell' addomine, si accosta all'osso sacro per terminare all'orifizio dell'ano. Non si saprebbe trovar differenza nella grossezza tra i tenui ed i crassi intestini, e tutto il canale è ritenuto dalla stessa membrana, cioè dal mesenterio, che immediatamente sotto il ventricolo procede dalle vertebre. I reni sono al loro posto, e sotto i medesimi i testicoli biancheggianti, piccolissimi, col margine convesso rivolto in fuori. Per lo più a quest' epoca non appajono i rudimenti della milza, e dell' omento. Il petto suol essere molto angusto; i polmoni bianchissimi distinti in lobi, e forse in lobetti, poichè tutta la loro sostanza è disseminata di punti più chiari, tutti insieme avvinti da tenerissima, e trasparente tela cellulare.

Ora ritornando alla bollicella ombelicale essa ritrovasi qualche fiata molto ampia quasi senza vestigio di addomine, di cui ella fa le veci, e racchiude i futuri intestini col mesenterio ricoperti soltanto da tenuissima, e trasparente pellicella. Sotto il centro della bolla non mancano giammai le due arterie ombelicali, che passano entro una tenerissima gelatina verso il corio tomentoso.

La vescichetta dunque assume varj stati: cioè o manifestasi come nuda contenendo le intestina, o qual-

che viscera, cosicchè la cute ed i muscoli manchino; o ricuopresi di cute, e formasi un passaggio tra i muscoli retti simulando un' ernia, o veramente si estende più oltre costituendo una grande vescica fra i vasi ombelicali. Questa disposizione del bellico fu notata anche da Albino *(a)* asserendo esservi grande diversità nei bellici di varj embrioni rapporto alla lunghezza, grossezza e figura; essere il ventre in tutti gli embrioni più o meno tumido, ed elevato verso il bellico.

Da quanto sinora si è esposto intorno allo stato della region ombelicale nell' embrione, risulta chiaramente che la suddetta conformazione non è fortuita, o mostruosa, perchè si osserva costantemente negli uovi umani fino al terzo mese dopo la fecondazione. Nè si può dire che sia morbosa, perchè dimostrano il contrario e gli embrioni sortiti dall' utero con tutto l' involucro senza avere sofferto alcuna lesione, e la uniforme struttura del ventre in quasi tutti gli feti abortivi. Dunque è forza di confessare, che è *naturale* quell'apertura, o quell' orifizio, che si ritrova all' ombelico de' feti prematuri, e si può con certezza stabilire, che il peritoneo sorte e si prolunga pel medesimo orifizio sotto forma di sottilissima membrana involvente gli intestini, e per lo più qualche viscera insieme.

Tale conformazione non è punto dissimile da quella, che alcuni celebri uomini ravvisarono più volte nel pulcino covato. Il Malpighi *(b)* notò, che passati tre giorni di covazione in vicinanza de' vasi ombelicali pen-

(a) Annot. Acad. L. I. C. 9. Tab. I. V. Fig. 3. 4. 5.

(b) De formatione pulli in ovo. Edit. Londini; pag. 7, 8; fig. 17, 18, 19.

deva fuori una vescichetta irrigata da vasellini rossi, ch'egli giudicò essere il ventricolo carnoso. In alcuni altri pulcini vide pendere il cuore fuori del torace. Dopo il sesto giorno l'addomine era chiuso, e sporgeva in fuori come se fosse affetto da ernia, ed i vasi ombelicali, che ne sortivano, andavano a finire parte nell'albumine circondante il vitello, e l'amnio, parte nel vitello stesso. Dopo la covazione di otto giorni il bellico molto largo oltre i vasi sanguigni conteneva gl'intestini come nell'ernia. Nella dodicesima giornata poi ravvisavasi tuttora l'orifizio del bellico, dal quale uscivano i vasi sanguigni, e talvolta gl'intestini, ed il ventricolo carnoso *(a)*.

Una disamina più attenta fu in seguito instituita dallo stesso infaticabile autore *(b)*. Egli dice di avere primieramente osservata una vescichetta piena di umore diafano in vicinanza del ramo destro ombelicale. Passato il quarto giorno rivide la vescichetta accanto ai vasi ombelicali, contenente umore, ed i rudimenti molli e candidi delle parti interiori sotto forma di rozzi sacchetti. Il bellico allargato, e coperto di cute allungata dopo il nono giorno era occupato dai vasi ombelicali, e dai procidenti intestini. Ne' giorni seguenti pareva che il pulcino traesse origine dal tralcio, dal quale pure derivava il vitello involto in una lassa membranetta contenente una sostanza oleosa e glutinosa. Il bellico formato da rilassata e tubulosa cute aveva l'apparenza di un intestino grosso, entro il quale vi fos-

(a) L. C. fig. 21, 23

(b) Appendix de ovo incubato. Tab. IV, V, VI, VII.

sero altri tenui intestini con vasi sanguigni, e varicosi.

Il bellico trovossi ampio e turgido per l'assorbimento del vitello anche passato il diciannovesimo giorno, ed oltre ai vasi ordinarj scoprivansi entro l'ombelico gl'intestini irrigati dai vasi meseraici.

Finalmente compiuto il ventesimo giorno il corpo del vitello totalmente rientrato nel ventre conciliava a quella cavità la forma di addomine, cioè turgidetta e rotonda, rimanendo una fessura nel centro, che dava passaggio all' uraco, ed ai vasi ombelicali.

L' illustre Haller seguendo le tracce del Malpighi ha con particolare industria investigata la generazione del pulcino (*a*), e notò, che all' ora 72 dal covamento appare primieramente la vescichetta ombelicale; che all' ora 117 il bellico era già formato; che per esso sortivano gl'intestini: e che la vescichetta sembrava quasi sospesa ad un gambo. Nell'ora 138 la membranetta del vitello videsi continuata col mesenterio, e quasi tutti gl'intestini raccolti nella guaina ombelicale alle ore 192. Similmente gl'intestini quasi tutti trovaronsi posti fuori del corpo nella vagina ombelicale circa le ore 240, 261, 263, ed i vasi accompagnanti gl' intestini penduli procedevano dai meseraici. Nelle ore 288, 316 porzione non piccola d'intestini, ed il condotto vitellario erano fuori dell'addomine. Il bellico all' ora 337 somigliante ad un cilindrico sacchetto dava passaggio ai vasi ombelicali, a porzione d'intestini, all' uraco ed al canale del vitello. Ma nel giorno 19 poca parte di vitello trovossi fuori dell' addomine, essendo la mag-

(*a*) De formatione pulli Comment. 1. C. 3

gior porzione entrata nel ventre; e l' orifizio addominale conservavasi ampio, e guernito di sfintere musculoso, pel quale con tutta facilità il rimanente vitello poteva ritirarsi nel ventre.

Le poche osservazioni, che io ho intraprese sopra gli uovi covati sono assai inferiori in diligenza e pregio alle già indicate, massimamente perchè aveva io in allora rivolta l'attenzione al generale sviluppo del pulcino. Per la qual cosa assai più tardi ho posto mente alla *vescichetta*, non sapendo in allora di quale importanza ella fosse nell' economia animale. Dirò dunque brevemente di ciò, che ha qualche rapporto coll'oggetto che si disamina, e che serve d' induzione per le particolarità osservate negli embrioni umani.

Nel secondo giorno della covatura altro non mi avvenne di distinguere ad occhio nudo, fuorchè due o tre vasi sanguigni, che diramavansi sopra il vitello, ed uno o due punti bianchi sulla superficie del medesimo. Nel quinto la chiara o albumine era quasi del tutto dissipato, ed il rosso disciolto in un colliquamento smunto, guernito di una rete di vasi sanguigni, che andavano a mettere capo al cuore del tenero pulcino, il qual cuore era collocato nel mezzo, e circondato da una atmosfera di umor bianco.

Nel settimo il pulcino moveva tutto il corpo a semigiri orizzontali entro l'amnio stando col capo ripiegato, e la spina incurvata; pur talvolta stendeva una coscia, o un'ala. I vasi, che procedevano dalla superficie del vitello, erano numerosissimi e pieni di sangue. Gli occhi grandi col pigmento; il becco già formato; e le quattro vesciche superiori avean già preso i luoghi

destinati pel cervello, ed il cervelletto. Il cuore batteva a due ventricoli, e due orecchiette; il torace già fatto; e solo il cuore era quasi a nudo, vestito soltanto da tenuissima membranetta. Egli rimase per lunghissimo tempo irritabile al solo contatto d'un ferruzzo, ed anche alla semplice pressione sui lati. Non eravi addomine per mancanza di muscoli e di tegumenti, ed in di lui vece innalzavasi una ampia e tumida vescica formata dal trasparente peritoneo, ed era pur trasparente, e confuso agli occhi tutto ciò che contenevasi in detta vescica.

Nella decima e nelle seguenti giornate si vide distintamente il bellico, perchè l'addomine veniva coperto da carne e da tegumenti, e vi rimaneva un ampio forame, pel quale uscivano le intestina bianchissime, aggomitolate a foggia di vermini, e rinchiuse in una membranetta insieme alle arterie, e vena ombelicale, che per la prima volta potei distintamente contemplare. Li detti vasi ombelicali sorgevano da tutta la superficie del vitello, essendomi sembrato, ch'esso facesse l'uffizio di placenta, e che somministrasse la materia pel sangue del pulcino. Anche il vitello rimane rinserrato in una membrana propria tutta disseminata di vasi sanguigni, i quali non hanno alcuna relazione colla membrana bianca, che investe la corteccia dell'uovo.

Nel giorno 14 le intestina vedevansi ancora fuori del basso ventre, ma l'orifizio era maggiormente ristretto, ed il peritoneo applicavasi da ogni lato alle pareti interne dell'addomine. Dal 15 in avanti trovai una bianca membranetta che copriva interiormente la testa dell'uovo; indi un'altra più sottile, e bianca come la

prima, ed una terza diafana ripiena di vasi sanguigni, che attorniava tutto l'uovo molle. Seguiva il vitello avente una cavità interna guernita di vasi sanguigni, fra le aree dei quali vedevansi certi corpicelli come glandolosi disposti in serie, o a strati, e terminanti in un circolo comune. Nel mezzo vi era porzione di vitello disciolta: tutto il vitello poi raccoglieva i vasi per mandarli all'embrione, nè fra essi potei distinguere le arterie dalle vene. Il vitello poi conteneva una nicchia pel pulcino, che sta rinchiuso in una sorta d'amnios col suo liquore, e viene attorniato da altra membrana trasparente, attaccata ai confini del vitello, che si direbbe il *corion*. Muovesi il pulcino entro il liquore, ma tai movimenti hanno del convulsivo, e perciò muore più presto il pulcino, di quando è meno perfetto. Le intestina in questo stadio veggonsi ancora fuori dell'addomine nel sacco del peritoneo, alla di cui estremità osservasi un corpicello bianchiccio.

Nel sedicesimo giorno il pulcino era molto più perfetto, e più vitale; moveasi più gagliardamente tenendo il becco sotto una coscia. Era circondato da due membrane, una comune al medesimo ed al vitello ripiena di vasi; l'altra più sottile, che sembrava propria del pulcino, il quale non aveva d' intorno a se che pochissimo albumine; e quello che sta sotto il vitello erasi dileguato, non vi rimanendo che poco di chiara in istato di coagulo. Vidi di nuovo la nicchia nel mezzo del vitello contenente un po' di sostanza rossa disciolta. Le intestina trovaronsi fuori dell' orifizio del bellico, ed all'estremità del processo ombelicale eravi appiccato un corpicello ovale, bianchissimo.

Il pulcino in procinto di sortire dal guscio nel 19 giorno stava nel guscio vuoto. L'ombelico parve asciutto, avente l'apertura rotonda, larga, con margine a foggia di anello. Pendeva dal mezzo qualche cosa di bianco non bene distinguibile. Avendo aperto il ventre osservai, che tutta la vescica formata dal tuorlo era entrata nella cavità addominale; che il suo fondo era rivolto all'orifizio del bellico; e che la sommità era legata al duodeno con produzione membranosa. Tutto il restante corpo di detta vescica o bolla era sciolto e libero, di modo che la sollevai tutta intiera, e sotto di essa vidi il ventricolo, le intestina tenui; il retto, ec. Questa vescica del tuorlo racchiudeva un po' di liquame giallo, e la maggior capacità del basso ventre veniva dal tuorlo occupata.

Fin quì mi sono studiato di esporre in succinto quanto dai più valenti osservatori e da me è stato notato intorno alla costituzione e fabbrica della *bolla* ombelicale. Non posso però dissimulare, che la grand'opera concernente la generazione e lo sviluppo del pulcino non abbia bisogno di ulteriori indagini, e schiarimenti. Tuttavia mi lusingo, che dalle nozioni finora acquistate intorno a questo punto di fisiologia si possa verosimilmente stabilire: che le viscere delle tre grandi cavità del corpo si vanno successivamente formando, e sviluppando per così dire a nudo; che giunte le medesime ad una certa maturità e consistenza, si ricuoprono di cartilagini, di carne, di tegumenti; che quelle del basso ventre sono le ultime ad essere rinserrate dai muscoli, e dai tegumenti, perchè più lentamente si vanno organizzando; che le predette viscere pria di essere investite alla superficie anterior del

corpo pajono quasi locate fuori della rispettiva nicchia o cavità, in cui subentrano a misura che vi si estendono sopra i velamenti proprj, e comuni; e finalmente che la borsa del peritoneo, la quale forma un sensibile prolungamento fuori dell' orifizio ombelicale, è l' ultima a rientrare in cavità ed a ristringersi.

Dietro questi dati ci si apre la via per passare alla spiegazione di quelle morbosità, che in detta parte si osservano non di rado specialmente nell' infanzia. Tali morbosità si possono dire *congenite*, perchè esistenti prima della nascita. Egli è ormai notissimo, che nel feto maschio i due processi inguinali del peritoneo sono da prima rivolti in alto verso i reni nel cavo addominale, i quali un mese circa prima del parto, o in vicinanza di esso calano giù nell' inguine, e di là nello scroto insieme ai testicoli, che sostengono, e per essi succedono le ernie inguinali congenite, se gli orifizj dei suddetti processi non si otturano o non si ristringono. Somiglianti processi cavi ritrovansi pure ne' feti femmine, ma in ordine inverso, cioè esistenti sempre nell' inguine. Del pari il processo ombelicale del peritoneo in ambo i sessi esiste fino dai primi rudimenti del feto, e protegge le viscere che vi sono rinchiuse. Ora questa produzione del peritoneo se non si ritira entro il cavo addominale, come è stabilito dalla natura, insieme alle viscere in essa contenute, e se non si ristringe, e chiude l' orifizio del bellico, diventa un *processo ernioso*; e molto più vasta e pericolosa è una simile ernia, se per mala sorte il processo non arriva ad essere ricoperto dai muscoli e dalla cute.

Chiamasi tal sorta di ernia *Enterocele ombelicale*,

Enteromfalo, Omfalocele, Esomfalo. Non è infrequente l'ernia ombelicale ne' bambini nati di fresco, il qual infortunio si suole dal volgo attribuire alla mal eseguita allacciatura del tralcio.

Io ne distinguo di due sorta rapporto all'apparenza esteriore: di quelle, che sono ricoperte dai comuni velamenti; e di quelle che sono snudate, e protette soltanto dalla lamina del peritoneo. Molti esempj della prima specie trovansi presso gli autori. Per tralasciarne molti basterà il ricordare quello di Calder *(a)* di un bambino morto nel quinto giorno dopo la nascita per essere usciti dall' addomme l' intestino digiuno, tutto l' ileon, una parte del colon, ed il cieco. Nell' anno 1789 si trovò fra gli esposti un ragazzo, a cui era stata fatta l'allacciatura per l'ernia ombelicale. Il giorno seguente si sciolse la legatura a motivo di dolori, e di vomito sopraggiunti al bambino. Questi fra tre giorni morì, non avendo vissuto che sette. Nel riconoscere le parti comprese nella legatura si vide l' ileo cancrenato, e teneva impressa la solcatura lasciata dal laccio. La guaina del peritoneo era tuttora allungata entro il mezzo del funicolo ombelicale. La cute sana.

Non si può negare, che gli esempj di Enteromfali nei bambini non sieno rari, e perciò basterebbe il farne di essi un cenno. Ma siccome vengono da molti sedicenti chirurghi imprudentemente trattati, così credo che meritar debbano l'attenzione dei pratici non volgari. Celso aveva di già proposta l' allacciatura per

(a) Saggi d' Edimburgo. Vol 1. Art. 14.

sanare l' Enteromfalo trapassando con ago munito di refe la cute. Alcuni lo hanno imitato; altri si sono contentati di stirare la sovrabbondante cute del bellico, e di strozzarla con forte legatura, il che può bastare in un gran numero di casi senza impiegar l'ago. Ma se la legatura non è eseguita da esperto maestro, ognun vede che può essere compreso l' intestino, come accadde nel caso sopra riferito. Il perchè Ildano ha imaginato una fasciatura, che è delineata da Sculteto *(a)*, colla quale si compie felicemente la cura, evitando tutti i pericoli. E non è il solo intestino compreso nella legatura, che rende fatale l' operazione; perchè io credo di non errare asserendo che, ove questo sia risparmiato, vi abbia parte al pericolo la vena ombelicale, ed il legamento falciforme del fegato, i quali compresi necessariamente nella legatura contraggono uno stato infiammatorio, e lo propagano al fegato con evidente rischio della vita. Con tale argomento io non intendo di proscrivere affatto l' operazione per allacciatura, avendola io stesso eseguita più volte con successo; ma di tenere in guardia gli azzardosi operatori, e di far loro adottare la fasciatura ogni volta, che può essere bastevole all' intento. Intorno poi alla guarigione azzarderei di avanzare l' opinione che dessa non si effettua, perchè si rimove, e si strugge la cute sovrabbondante: essa ha luogo quando o si rimove o si procura il ristringimento di quella porzione di peritoneo, che si è oltremodo allungata, e che fin dal principio, come dicemmo, è stata sempre distesa fuori

(a) Armament. Chir. Tab. XXXVIII.

dell'addomine; imperocchè il natural uffizio del peritoneo è di contenere le viscere addominali, e di mantenerle nelle proprie sedi.

Ora passiamo all' altra specie di Esomfali, di quelli cioè, che non sono ricoperti dalla cute, e ne' quali le viscere sono semplicemente protette dal trasparente peritoneo. Nell' anno 1789 una contadina primipara diede alla luce una bambina matura, che aveva un esomfalo della grossezza di mezzo pugno. Era desso pellucido, concamerato, vestito dal peritoneo, sotto il quale gl' intestini un poco lividi apparivano. Dalla sommità spuntava il tralcio ombelicale, ed i comuni tegumenti eransi fatti aderenti intorno alla base dell'Esomfalo. L'abito di corpo della bambina era d'altronde assai robusto.

Due anni dappoi cioè nel 1791 fui chiamato di notte per assistere allo sgravamento d' una primipara, la quale dopo fieri dolori evacuò grandissima copia di acque, e non poco sangue, cui tenne dietro il feto, ed il suo braccio sinistro pendeva fuori delle parti naturali al mio arrivo. Per la qual cosa mi accinsi ad operare, ed estrassi pe' piedi un feto senza vita, e la placenta seguì il feto senza ritardo. Dal lato destro addominale di questo bambino propendeva una gran massa contenente quasi tutte le viscere del basso ventre, alle quali dava libera uscita un' ampia apertura degli integumenti. Si trovarono uniti in questo sacco il ventricolo cogl'intestini, ed il mesenterio, eccettuato il retto; poi il fegato, la milza, la capsula soprarenale destra, ed il testicolo destro colla rispettiva base, o allungamento del peritoneo. Il tralcio non più lungo di

una spanna sorgeva bensì dal centro del bellico; ma la vena ombelicale deviando dal corso ordinario s'immergeva direttamente nella fessura del fegato presso il lobulo. Ed il tralcio dalla parte sinistra veniva abbracciato dalla cute; ma a destra essa mancava tanto in alto quanto inferiormente al funicolo per modo che lasciava quella vasta apertura, per cui le viscere si erano fatta strada, o per meglio dire si erano formate e mantenute fuori della cavità naturale, per non essersi allungata la carne ed i tegumenti. Il margine della cute mancante non era cruentato, ma in certa guisa attenuato, ed aderente al peritoneo, i di cui lembi, o frangie erano patentissime. E perciò mi è parso, che le viscere, essendosi offerte del tutto illese, sieno state ricoperte dal peritoneo, che poi siasi lacerato sotto gli sforzi delle contrazioni uterine o del parto. Una prova ancora dell' esistenza di detta produzione, o vagina del peritoneo si è che alla inferior parte di essa videsi agglutinata quella lamina dell' amnio, che investe il tralcio. Vi è motivo di credere, che il peso delle viscere sortite sia stato la cagion principale del parto preternaturale; imperocchè gravitando esse in basso, e fuori del centro, sono sottentrate al luogo, che doveva occupare la testa. In fatti che la massa viscerale siasi presentata la prima, deducesi dal tatto, essendosi offerta tanto a me quanto alla mammana nell' esplorare una molle sostanza, che mi fece sospettare di uno staccamento della placenta dall' utero. Nè si poteva avvalorare un altro sospetto cioè, che l' accennata morbosità potesse essere l'effetto di qualche violenza esteriore; perchè dietro le più esatte indagini risultò, che la

madre non fu mai esposta ad alcun oltraggio o violenza.

Da madre povera e multipara nacque nel 1786 una fanciulla con estesa Omfalocele, che illividì poco dopo il parto. Il volume era della grossezza d' un pugno perfettamente globoso, dal cui centro innalzavasi il tralcio ombelicale. La base del tumore pareva riposta entro l' addomine, ed esteriormente veniva accerchiata dal margine della cute quasi cruento, benchè questa si fosse agglutinata d'ogn' intorno al sacco dell'omfalocele. Il sacco poi o vagina dell'omfalocele era costituita da tenue membranetta, fosca, cinericcia, resiliente alla pressione come una vescica piena di fluido. Vomitò la bambina il primo latte che prese, e ne' giorni successivi lo prese con avidità. Si asciugò la superficie dell'omfalocele, e si ricoprì d' una squamosa pellicina. Dopo sedici giorni finì di vivere, e nell' investigazione del tumore ci presentò un perfetto Epatocele.

A questi esempj di Esomfali ne aggiungo pochi altri, che trovansi registrati presso i più accreditati osservatori. Il Ruischio *(a)* scrive di avere più volte veduto mancare la cute ed una porzione di muscoli in giro al tralcio nei bambini appena nati, onde trasparivano le interiora attraverso il peritoneo. Su di ciò si possono inoltre leggere le opere di Sculteto, e di Heister *(b)*. Ma in luogo di molti altri, che si potrebbero citare sul nostro proposito, basterà far cenno di tre osservazioni del Morgagni registrate nell'Epistola XLVIII.

(a) Obs. Anat. Chir. 71, 72.
(b) Arm. Chir. Tab. 38.
Instit. Chir. Cap. CXIV.

La prima è di una bambina mostruosa data alla luce nel quinto mese di gravidanza, in cui, tralasciando di parlare di altri vizj addominali, i muscoli ed i comuni integumenti a loro sovrapposti non vestivano che una minima parte del ventre anteriore; il restante veniva ricoperto da una lassa membrana, distesa a guisa d' una gran borsa, nella quale insensibilmente andavano a terminare i muscoli ingraciliti, ed i tegumenti. Nel cavo di questa borsa trasparente vedevansi il fegato, e gl' intestini quasi pendenti all' infuori. L' altra è di un fanciullo partorito da una matrona, a cui rimaneva aperto il basso ventre nel mezzo, e per esso erano usciti gl'intestini. L'ultima è di un feto, nel quale gl' intestini ed altre viscere sortite pel forame addominale distendevano enormemente il peritoneo, unico velamento, che le conteneva.

Dalle osservazioni fin qui riportate risulta dunque che si deve ammettere come fatto anatomico, se non erro grandemente, che oltre ai due processi inguinali, esiste in forza della primiera conformazione nei feti il processo-ombelicale del peritoneo; che perciò le ernie ombelicali nei feti, o nei parti maturi dipendono da vizio di detta particella, che non si contrae come dovrebbe, e non rientra come per lo più suole nell' addomine, o da mancanza dei muscoli, e della cute, che non crescono e non si allungano a segno da ricoprire, e servire di riparo alle viscere contenute nel basso ventre.

AGGIUNTE

alla Parte II della Memoria sulle livellazioni barometriche

DI FRANCESCO VENINI

ricevute il dì 28 di maggio 1808

(Alla fine del num. 32)

Nell' estratto della relazione del sig. Biot stampato negli Opuscoli al luogo citato, e del qual solo io ho potuto valermi, sono certamente erronei i numeri indicanti i gradi del termometro situato all' Osservatorio; e tutti debbon esser accresciuti d'una decina. In fatti il sig. Laplace alla pagina 265, tomo IV della Meccanica celeste dice, che quando il globo fu all'altezza di 6980 metri sopra il livello della Senna, il termometro centigrado era a $-9°,5$, ma che nel tempo stesso era all' Osservatorio a $+30°,75$. Ora $+30°,75$ del termometro centigrado equivalgono a $+24,6$ di quello, che comunemente chiamasi di Réaumur; ma nella relazion degli Opuscoli si legge, che al partir del globo, cioè circa 3 ore e mezzo prima, il termometro dell' Osservatorio era a gradi 13 , 2 Réaum. Qui è ma-

nifesto che i gradi dovevan essere 23 , 2; non 13 , 2; poichè in così breve tempo ben può il termometro aver variato di 1° , 4; non già di 11° , 4. E similmente quando il globo fu a 2000 tese d' altezza, ed il suo termometro era a + 8° , 4 Réaum., quello dell' Osservatorio sarà stato a + 24°, non a + 14°. La variazion del termometro nel tempo impiegato per salire a 2000 tese fu dunque all' Osservatorio 0° , 8: e quindi io credo che, quando il globo fu all' altezza di 1333 tese, ed il suo termometro a + 10° , 4, quello dell' Osservatorio sarà stato a 23°, 7.

La differenza di temperatura per 1333, 2000, e 3500 tese d' altezza furon dunque 13° , 3; 15° , 6; e 32° , 2. La prima dà esattamente un grado per 100 tese; la seconda 0° , 78; e la terza 0° , 92. Aggiunti questi tre risultati ai quindici precedenti, e divisa la somma per 18, si trova il risultato medio 0 , 9265; la cui differenza dall' unità non giugne ad 8 centesimi.

Quanto alle osservazioni del monte *Mole* si avverta, che l' altezza dal cav. Shuckburg assegnata a quel monte supera di 45 tese il risultato dei calcoli; ch' io con grand' attenzione ho esattamente eseguiti co' suoi dati medesimi, e senza introdurvi alcun cangiamento. Ma di questo parlerò poi più copiosamente nella terza parte; ove spiegherò varii modi di calcolar geometricamente le altezze; e ne farò l' applicazione alle misure del Fisico inglese. Dimostrerò allora, che troppo grande è anche l' altezza da lui attribuita al monte Saleve sopra la sua base; e che ben calcolata secondo i precisi suoi dati, essa conferma la regola del sig. Deluc anzichè contraddirla.

(Ai numeri 47, 48, 49)

Al num. 47 determinando la costante colla condizione, che, quando è $x = 0$, sia $g' y = g A$, l'ho trovata $= B l A + \frac{2 B x}{r}$. Or questa espressione, si dirà forse, contenendo la variabile x, non pare che possa chiamarsi costante. Io nol niego; ma, per togliere ogni difficoltà, osservo che anche sulle vette de' più alti monti la diminuzione della gravità in ragion duplicata delle distanze accresce di poche tese l'altezza data dal calcolo per la gravità costante. Quindi segue che dopo aver calcolata l'altezza per la gravità costante, il risultato potrà sostituirsi ad x nel termine $\frac{2 B x}{r}$, e così renderlo costante. Si chiami R il risultato suddetto; e l'equazione *(E)* del num. 47 diverrà $x - \frac{x^2}{r} = R + \frac{B (C + c) R}{r}$; ovvero $r x - x^2 = r R + B (C + c) R$.

Finalmente prendo i logaritmi, e mi viene $L (r - x) + L x = L R + L (r + B (C + c))$.

Per l'esempio del monte Saleve quest'equazione è $L (3266330 - x) + L x = L 490, 744 + L 3274691 = 9 . 20602553$.

Or, dovendo l'altezza esser alquanto maggiore di 490, 744, io comincio a supporre $x = 492$: ed il primo membro dell'equazione mi risulta $= 9 . 20595976$

minor del secondo, ma ben di poco. All'opposto la supposizione d' $x = 492,1$ mi dà per primo membro 9.20604592 alquanto maggior del secondo. Ma per le supposizioni d' $x = 492,08$; $x = 492,07$ il primo membro si cangia in $9.20603035 27$, ed in $9.20602 1554$, val a dire, che per una supposizione è maggiore, ma per l' altra minor del secondo. Il vero valor dell' incognita sta dunque fra i limiti $492,07$, e $492,08$; onde la differenza tra questo risultato e quello del num. 47 non giunge a due centesimi di tesa.

Dall' equazione $x - \frac{x^2}{r} = R + \frac{B(C+c)R}{r}$ si deduce che $\frac{R^2 + B(C+c)R}{r}$ esprime l' aumento dell' altezza prodotto dalla gravità decrescente, il quale al num. 47 ho detto esser espresso da $\frac{x^2 + B(C+c)x}{r}$; ove x è lo stesso che R. Ciò posto ognun vede, che l'una e l'altra costante egualmente conducono alla medesima formola d'accrescimento.

E per simil guisa, se nelle costanti dei numeri 48, 49 porremo $\frac{2BR}{r}$ in luogo di $\frac{2Bx}{r}$, e con questo cangiamento solo ripeteremo i calcoli delle altezze, giungeremo a risultati egnali pel numero intiero delle tese, e sol diversi di qualche frazione. Quanto al num. 48, in cui trattasi del calor decrescente in progressione aritmetica, io avverto il lettore, che vi sono scorsi

alcuni piccioli errori nei numeri, i quali però non influiscono nel risultato, cioè nella determinazione dei limiti, fra i quali l' incognita è contenuta. Nell' equazion finale a 16708, 59 deve sostituirsi 16722, 86. Fatta questa correzione, se supporremo $x = 492$, troveremo, che l'equazion si riduce a $492 - 563, 88 = -71, 88$. Ma la supposizione d' $x = 493$ ci condurrà a $493 - 465, 94 = +27, 06$. I limiti dell'equazione son dunque 492, 493 quali gli avevam già trovati.

Sostituita R ad x nel termine $\frac{2Bx}{r}$ della costante, essa diverrà $-(\frac{1}{m} - \frac{2C}{m^2 r})\, l\, C + B\, l\, A + \frac{2BR}{r}$; e l'integrale dell'equazione sarà $-(\frac{1}{m} - \frac{2C}{m^2 r})\, l\,(C - mx) + \frac{2x}{mr} = B\, l\,(\frac{A}{y}) - (\frac{1}{m} - \frac{2C}{m^2 r})\, l\, C + \frac{2BR}{r}$; ovvero $x - l\,10\left(\frac{mBr}{2} L\frac{A}{y} + (\frac{r}{2} - \frac{C}{m})\,(L(C - mx) - L\,C)\right) - mBR = 0$.

Nel solito esempio del monte *Saleve* il valore di R pel num. 37 è 491, 36, onde viene $m\,B\,R = 98, 5962976$, o più semplicemente 98, 6. Sostituisco nell' equazione i valori di m, B, r; e la cangio in $x - l\,10\left(327710, 89\, L\frac{A}{y} + (1633165 - 20000\, C)(L(C - \frac{x}{20000}) - L\, C)\right) - 98, 6 = 0$.

Finalmente, sostituiti i valori di $L\frac{A}{y}$ e di C; poi supposto $x=492$, si trova $492-549,33=-57,33$: ma colla supposizione d'$x=493$ si giugne a $493-471,05=+21,95$. Anche col termine $\frac{2BR}{r}$ sostituito nella costante a $\frac{2Bx}{r}$ si trovan dunque per l'incognita gli stessi limiti 492, 493.

Pel calor decrescente in progressione armonica, quale si è supposto al num. 49, già si è osservato, che l'aumento dell'altezza nato dalla diminuzione della gravità è espresso da $\frac{2mx^3}{3r}+\frac{x^2+2BCx}{r}$; ove il termine $\frac{2BCx}{r}$ si cangia in $\frac{2BCR}{r}$ supponendo la costante $=BClA+\frac{2BCR}{r}$. Ciò premesso, egli è chiaro, che alle due costanti corrisponde il medesimo accrescimento, cioè $\frac{2mR^3}{3r}+\frac{R^2+2BCR}{r}$.

Aggiungo, che i medesimi risultati si ottengono anche dalla supposizione, che y si cangi in A quando è $x=0$. Imperciocchè in questo caso la costante pel num. 47 è $=BlA$; e l'equazione $\frac{2}{C+c}\left(x-\frac{x^2}{r}\right)=$

$B\,l\,(\frac{A}{y})$. Osservo ora, che g è la gravità del mercurio per la colonna A, ma g' per la colonna y; e ne conchiudo, che l'equazione cangiasi in $\frac{2}{C+c}(x-\frac{x^2}{r}) = B\left(l\,(\frac{A}{y})+l\,(\frac{g}{g'})\right) = B\,l\,(\frac{A}{y})+\frac{2\,B\,x}{r}$; poichè al num. 47 si è dimostrato, che $l\,(\frac{g}{g'})$ è $=\frac{2\,x}{r}$. Il lettore può verificar facilmente, che facendo la stessa supposizione d'$y=A$ quando x è $=0$, e ponendo prima $l\,(\frac{A}{y})+l\,(\frac{g}{g'})$ in luogo di $l\,(\frac{A}{y})$; poi $\frac{2\,x}{r}$ in vece di $l\,(\frac{g}{g'})$ si arriva nei num. 48, 49 alle medesime equazioni finali.

Conchiudiam finalmente, che la prima forma da me assegnata alla costante, benchè straordinaria, non è però d'un uso men sicuro per calcolar esattamente le altezze.

Fig 1

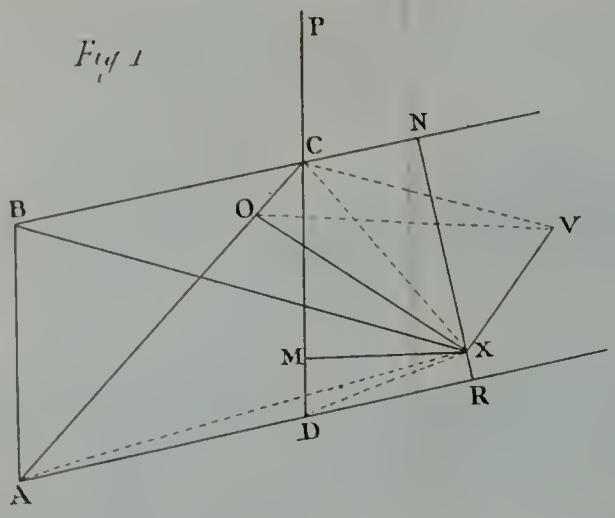


Fig 4

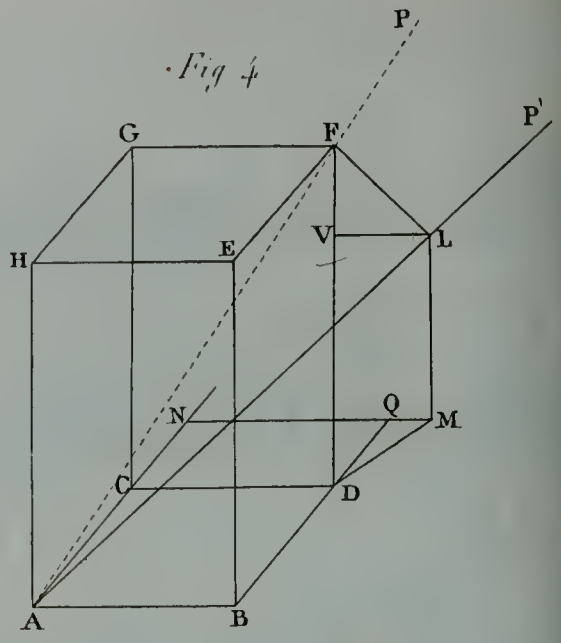


Fig 2

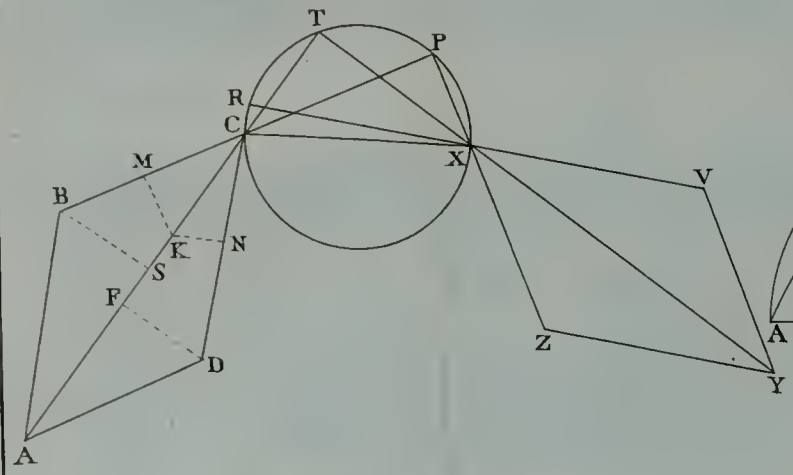


Fig 5

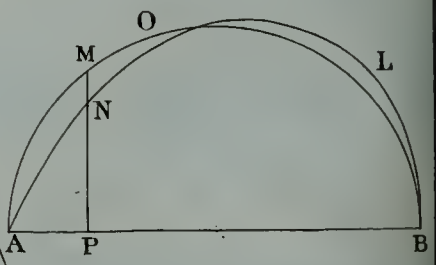


Fig. 3

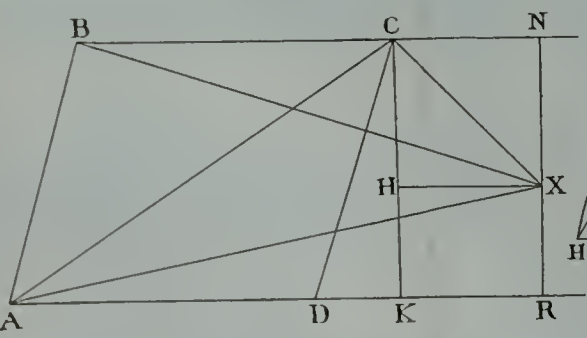
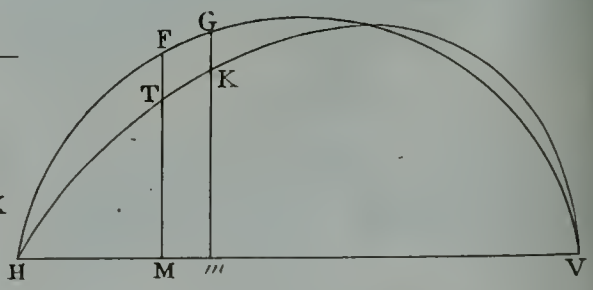


Fig 6.



SUL PRINCIPIO DELLE VELOCITÀ VIRTUALI.

Di Girolamo Saladini

presentata a' primi di giugno 18c8

Il principio in meccanica detto delle velocità virtuali, bellissimo ed utilissimo ritrovato dell'immortale Galileo, e dagli equilibrj tutti sì de' solidi che de' fluidi fatto ampiamente palese, giusta la sentenza dei seguaci di Leibniz e di altri sapientissimi matematici resta munito di geometrica dimostrazione. E a vero dire se per forze o potenze che fannosi equilibrio quelle s' intendano talmente disposte che se il corpo da queste sollecitato potesse concepire realmente un moto benchè minimo, nascerebbero le loro azioni eguali e contrarie; e se oltre a ciò si supponga che l' azione cresca e decresca come aumentasi e scema il prodotto di ciascuna potenza per lo spazietto di accesso o recesso dal rispettivo centro, come pretendono i leibniziani, cioè per lo spazietto in cui la potenza contro il corpo esercita l' azione sua, spazietti che cadono sotto il nome di velocità virtuali, in tali casi la dimostrazione del principio niente lascia a desiderare: conciossiachè

esso, com'è già noto, si espone così „ Le potenze applicate ad un corpo coll' impedirsi fanno equilibrio, quando supposto minimo moto per qualunque siasi direzione, i prodotti di ciascuna potenza nello spazietto rispettivo pel quale esse agirebbero sul corpo, insieme presi sieno uguali a zero „ imperocchè le azioni positive insieme prese sarebbono in questo caso uguali alle negative insieme prese esse pure; onde se si desse moto, niuna ragione sarebbevi per la quale dovessero prevalere quelle a queste o queste a quelle. Di quà ebbe origine il celeberrimo principio d' azione, radice e fonte non solo de' principj tutti sino a' dì nostri nella meccanica conosciuti, ma forse anche di quelli cui la tendenza che hanno gli uomini ad innovare per l'avvenire immaginerà. Ma comecchè la recata dimostrazione assai limpida sembri e da genuine fonti rettamente dedotta, pure non va a genio di alcuni matematici anche di somma riputazione: laonde il chiariss. Lagrangia nell' esimia sua opera, ove la meccanica col solo calcolo algebraico è compitamente trattata, pone per base del suo edificio il principio delle velocità virtuali, ravvisando in esso *una specie d'assioma di meccanica*; e incominciando dalla considerazione di tre forze applicate a tre punti ed equilibrate, richiama l' idea del vette, e dimostra avervi luogo il principio delle velocità virtuali; dal che ne deduce che ciò si avvera pur anche se le potenze equilibrate sieno infinite di numero, e ad infiniti punti de' corpi applicate. Ma come in altri, così anche in me nasce dubitazione, se possa venire addirittura accordato meritamente alla *specie di assioma* un posto tra quelle verità che della

luce meridiana più chiare forzandoci a riconoscerle per tali, risplendono di geometrica certezza. E che dovrassi dire de' fluidi, ne' quali l'idea del vette non è sì naturale, ne sì atta a quietare gl'intelletti più scrupolosi? E qui forse cadrebbe in acconcio la lamentanza che molti infingendosi di poter imitare ciò che è parto di rari genii, non guardata omai più con predilezione l'esatta maniera di dimostrare de' prischi geometri, dilettansi di trattare le meccaniche dottrine col calcolo solamente; il qual divisamento comecchè paia giovare all'auge della scienza, talvolta però in sola ammirazione e commendamento risolvesi dell'autore, intanto che la certezza si lascia desiderare e l'evidenza sole atte ad irradiar lo intelletto, ad allettarlo, a convincerlo. Ed ecco come nelle mattematiche si fecer largo le discrepanze da cui questa scienza predicavasi immune, e come molte cose che si spacciavan dotate d'una irrefragabil certezza, dubbie poi ritrovate ed oscure, e non iscandagliate bastevolmente, fu giocoforza scartarle; e come altre che si mettevano in voga quai vere senza alcun limite e modo, di strettissimi confini si riconobbero meritevoli. Per il che più avvedutamente crediamo noi diportarsi coloro che dando con bel modo alla geometria ed all'algebra la fratellanza, una intera irrefragabilità ed un sommo chiarore procacciano alle dimostrazioni, metodo che da accreditati matematici si vede adoperato frequentemente.

Ma per far ritorno al nostro assunto, il celebre sig. Prony nella *Nuova architettura idraulica*, opera grandiosa e non mai bastantemente encomiata dopo aver data l'idea del principio delle velocità virtuali sog-

gingne „ il n'existe pas de démonstration générale et directe de ce principe; mais sa vérité n'en est pas moins certaine, puisqu' il donne des résultats absolument conformes à tous ceux obtenus d' ailleurs „. Indi invita i lettori a consultare la *nouvelle mécanique de M^r. de Lagrange*; di cui mostra tutta la stima che merita.

Il celebratissimo Vincenzo Riccati gran promotore del principio delle velocità virtuali, che per lui è sinonimo del principio delle azioni, in una lettera al P. Domenico Paveri inserita fin del 1767 nel tomo 5°. parte 2ª. dei Commentarii dell' Istituto di Bologna, ove sulle traccie di Daniele Bernulli dà la geometrica dimostrazione di quello della composizione delle forze, non riconosce fuori di esso altro principio di statica geometricamente dimostrato.

Il sig. Caval. Fossombroni matematico di stabilita riputazione non accorda anch' egli al principio delle velocità virtuali il nome di specie d' assioma; anzi reputa necessario che sia fissata la sua geometrica certezza con incontrastabile dimostrazione. Ei dette non ha guari alla luce un' eccellente Memoria, nella quale si propone di rendere immune la teorìa delle velocità virtuali da qualunque ombra, di ampliarne gli usi specialmente riguardo ai fluidi; e spera di riuscirvi col soccorso del calcolo delle variazioni e delle funzioni indeterminate; e ciò che è più, mettendo da parte ogni disputa sull' essenza de' fluidi, e se debbansi essi aver in conto di tali oltre ogni limite, o se sia lecito di concepirgli composti di minutissimi atomi solidi segregati, cioè minimamente coerenti; la qual nuova e più spe-

dita maniera di trattare le materie idrodinamiche promette alla scienza progressi notabili. Ma sebbene la Memoria del ch. autore contenga viste interessanti e novelli ritrovamenti ottenuti col presidio di calcoli sublimi e d' ingegnosi artificii, e vengano opportunamente rischiarati con dimostrazioni geometriche, per cui l'uso del principio delle velocità virtuali riceve maggiore ampiezza, nè possa negarsi che lo stesso principio non sia da nuova luce grandemente illustrato, nientedimeno non saprei se siasi ancora in istato di vedere la geometrica certezza che si desidera, posta onninamente in sicuro.

Ed essendomi ancor io proposto di esplorare fin dove si estenda la geometrica dimostrazione del principio delle velocità virtuali, anch' io fo discendere questo dal principio di composizione e di risoluzione delle forze *(a)*; di cui, dopo ciò che ne hanno lasciato scritto Daniello Bernulli, Riccati, Alembert ed altri uomini prestantissimi, non credo poter esservi alcuno che non riconosca e non senta la metafisica certezza e geometrica.

Teorema I

Sia pertanto il parallelogrammo $ABCD$ (Fig. I) la cui diagonale AC, e nel piano di esso un punto

(a) La stessa verità venne ultimamente dimostrata con pari semplicità ed esattezza dal Ch. Caval. Araldi membro e segretario dell' Istituto nazionale italiano nello Scolio della sua eccellente Memoria, il cui titolo „ *Tentativo di una nuova e rigorosa dimostrazione del principio dell' equipollenza ;* che si legge nella prima parte di questo tomo.

qualunque X, da cui siansi calate le perpendicolari XO, XM, XN alla diagonale AC, ed ai lati CD, CB che concorrono colla diagonale in C. Dico che il rettangolo della diagonale AC sulla rispettiva normale XO è eguale ai rettangoli insieme presi dei lati BC, CD sulle rispettive normali XN, XM.

La dimostrazione che è brevissima, dai primi rudimenti ricavasi della geometria. Il parallelogrammo $BCDA$ è il doppio del triangolo CDA, e questo triangolo è uguale ai triangoli CXA più AXD meno CXD, tirate cioè le rette CX, AX, DX. Inoltre il triangolo CXA è la metà del rettangolo CA sopra OX; il triangolo AXD è la metà del rettangolo AD sopra XR prolungata cioè la normale NX in R, finchè concorra con AD prolungata, che è parallela ad AC; ed il triangolo CXD è la metà del rettangolo CD sopra XM; dunque il parallelogrammo $BCDA$ o sia il rettangolo BC sopra NR è uguale al rettangolo AC sopra XO più il rettangolo AD sopra XR meno il rettangolo CD sopra XM; tolto il comune rettangolo AD sopra XR, rimane il rettangolo BC sopra XN uguale al rettangolo AC sopra XO meno il rettangolo CD sopra XM, o sia il rettangolo BC sopra XN più il rettangolo CD sopra XM, sono eguali al rettangolo AC sopra XO. Se il rettangolo AC in XO si prende negativamente, la somma di questi rettangoli sarà eguale a zero.

Esistendo il punto X nel lato BC, sparisce il rettangolo BC in XN; se procede oltre per entro all'angolo PCN, il rettangolo BC in XN diventa negativo; e perciò non la somma ma la differenza dei ret-

tangoli dei lati nelle rispettive normali è uguale al rettangolo della diagonale nella sua normale. Ciò che si è detto del rettangolo del lato BC nella sua normale XN dicesi anche del rettangolo del lato CD nella rispettiva normale XM. La somma in una parola di questi tre rettangoli è sempre uguale a zero, purchè il rettangolo della diagonale prendasi negativo, e purchè si osservin le regole dai geometri stabilite sui segni; e questo basti l'averlo qui avvertito.

Teorema II

Sieno il parallelogrammo $ABCD$ (Fig. II) ed il punto X in un piano medesimo collocati; e tirata la CX, serva questa come di diametro a un circolo la cui circonferenza incontri le rette CD, AC, BC prolungate in R, T, P, e congiunte le rette RX, TX, PX, e prolungate in modo che sia $XY = AC$; $XZ = BC$; $XV = CD$ si tirin finalmente le rette ZY, VY; dico che il quadrilatero $XZVY$ è un parallelogrammo equilatero ed equiangolo al parallelogrammo $BCDA$; imperciocchè l'angolo VXZ è uguale all'angolo opposto al vertice, cioè RXP, o sia RCP insistendo ambedue sullo stesso arco; o sia è uguale all'angolo BCD al vertice, lo che degli altri pur si dimostra. Dunque i triangoli XVY, ACD hanno gli angoli ACD, VXY uguali, ed uguali i lati che gli contengono. Dunque VY, AD sono eguali; nella stessa guisa si dimostra $BA = YZ$; dunque questi due parallelogrammi sono equilateri, ed hanno eguali diagonali; ma per le cose dimostrate la somma dei ret-

tangoli XY in CT, XV in CR, XZ in CP nel senso sopra dichiarato è uguale a zero; dunque la somma dei rettangoli AC in CT, DC in CR, BC in CP è uguale a zero.

La retta XV insista perpendicolarmente sul piano del parallelogrammo $DABC$ (Fig. I.) tirate le CV, CX, VO, il quadrato CV^2 è uguale ai due quadrati CX^2, XV^2; ma è CX^2 eguale a CO^2 più OX^2; dunque CV^2 è eguale ai tre quadrati CO^2, OX^2, XV^2; ma VO^2 è eguale ai quadrati OX^2, XV^2; dunque è CV^2 eguale a CO^2 più OV^2; dunque la retta VO è ortogonale alla CA; e intese le rette VN, VM, si dimostrano anch' esse normali alle BC, CD; onde se da un punto qualunque dello spazio V si tirino le normali ai lati, ed alla diagonale del parallelogrammo, BC, CD, CA, saranno i prodotti AC in CO più BC in CN più DC in $CM = 0$; purchè per altro si prenda negativamente il prodotto della diagonale, cioè AC in CO. Questa proprietà del parallelogrammo è ad esso stesso sì propria, che se la posseggono tre rette le quali concorrano in un sol punto, e sieno nello stesso piano locate, congiunti i loro estremi, n'emerge un parallelogrammo necessariamente. Eccone la dimostrazione.

TEOREMA III

Sieno (Fig. I) in un piano tre rette, BC, AC, DC, che concorrano in un punto C; prendasi nel piano BCD un punto qualunque X, da cui sulle rette

CA, CB, CD prodotte se fia bisogno si conducano le normali XO, XN, XM, se il rettangolo AC in XO sia eguale ai rettangoli DC in XN, CD in XM, dico che congiunti i punti B, A, D, nasce il parallelogrammo $ABCD$.

Dimostrazione

Si conducano le rette CX, BX, AX, DX, il rettangolo AC in XO è doppio del triangolo CXA; il rettangolo BC in XN è doppio del triangolo BCX, e il rettangolo DC in XM è doppio del triangolo CXD; ma il rettangolo AC in XO è uguale ai rettangoli BC in XN, CD in XM per supposizione; dunque il triangolo CXA è uguale ai due triangoli BCX, CXD; aggiunto di comune il triangolo AXD, avremo il quadrilatero $CXDA$ eguale ai triangoli BCX, CXD, AXD; tolto il comune CXD, rimane il triangolo ACD eguale al triangolo BCX più il triangolo AXD, o sia eguale alla metà del rettangolo BC in XN, e del rettangolo AD in XR, calata cioè XR normale alla retta AD prolungata; e intesa dal punto C calata la normale all' AD, sarà il rettangolo di questa normale in AD, o sia il parallelogrammo $ABCD$ eguale ai rettangoli BC in XN, AD in XR. Da ciò ricavasi che le due normali XN, XR sono eguali alla normale calata dal punto C sopra AD, e che formano una retta sola. Sia essa CK (Fig. III) e dal punto X si conduca XH parallela ad RK, sarà l' angolo CHX retto, onde condotta

CX nei due triangoli CXN, CHX, abbiamo gli angoli in N e in H retti, CX comune, CH eguale ad NX; perchè essendo CK eguale ad RX più XN, ed essendo HK eguale ad RX nel rettangolo KX, sarà HC eguale ad XN; di più essendo gli angoli CXH, XCN opposti ai lati eguali ambedue acuti, avremo tutti gli altri elementi eguali, ed il quadrilatero $CHXR$ è un rettangolo, e le due perpendicolari XN, XR sono per diritto, e la retta BCN è parallela alla retta AD. Inoltre condotte le AC, BX, AX, DX (Fig. I), abbiamo dimostrato dianzi, che il triangolo ADC è uguale ai triangoli BXC, AXD, e perciò il doppio triangolo ADC è eguale al rettangolo BC in XN, più il rettangolo AD in XR; dunque due triangoli ADC o sia il rettangolo AD in NR, o sia i due rettangoli AD in XN, AD in XR sono eguali al rettangolo BC in XN, più AD in XR; tolto il comune AD in XR, resta BC in XN eguale ad AD in XN, cioè BC eguale alla retta AD; dunque il quadrilatero $ABCD$ è un parallelogrammo.

Quando si suppone che il rettangolo AC in XO sia eguale ai rettangoli BC in XN, DC in XM, è lo stesso che supporre il rettangolo AC in CO eguale ai rettangoli BC in CN, DC in CM, essendo queste due proprietà necessariamente connesse, come raccogliesi facilmente dal Teorema secondo. Chiamerò questi secondi rettangoli *corrispondenti* ai primi.

Se il punto V non fosse nel piano $BCDA$, ma nello spazio comunque, condotta VO perpendicolare ad AC, e VX normale al piano $ABCD$, e con-

giunta XO, questa sarà normale similmente ad AC; perchè il quadrato CV^2 a motivo dell'angolo retto COV è uguale ai quadrati CO^2, VO^2; parimente lo stesso quadrato CV^2 a motivo dell'angolo retto CXV è uguale ai quadrati CX^2, XV^2; dunque CO^2 più OV^2 sono eguali a CX^2 più XV^2; ma OV^2 a motivo dell'angolo retto OXV eguaglia i quadrati OX^2, XV^2; dunque i tre quadrati CO^2, OX^2, XV^2 eguagliano CX^2, XV^2; tolto il comune XV^2, resta CO^2 più XO^2 eguale a CX^2; dunque λO è normale ad AC. Lo stesso dicasi delle perpendicolari calate dal punto V sopra le rette BC, CD; le quali perpendicolari cadranno nei punti delle BC, CD, dove cadono le rette condotte dal punto X normali alle rette stesse, e perciò questo secondo caso si riduce all'antecedente.

Intorno al punto C esistano quanti si vogliono parallelogrammi comunque locati in diversi piani; e da qualche punto dello spazio si tirino ai lati ed alle diagonali di tutti questi parallelogrammi le normali, i prodotti insieme presi, de'quali tante fiate facemmo menzione, saranno uguali a zero. Imperciocchè il numero delle diagonali sarà la metà del numero dei lati dei parallelogrammi; se sopra queste si facciano altri parallelogrammi, il numero delle nuove diagonali sarà la metà del numero delle prime, e così operando successivamente si giungerà a un solo parallelogrammo in cui il rettangolo della sua diagonale nella rispettiva perpendicolare calata dal dato punto preso nello spazio sopra la stessa, sarà uguale a tutti i rettangoli dei lati dei primi parallelogrammi nelle rispettive perpendico-

lari calate sopra gli stessi; e se il primo rettangolo si prenda negativamente, la somma de' predetti rettangoli sarà eguale allo zero. Essendo ciò facilissimo a comprendersi, non mi dilungo nel dimostrarlo. E' superfluo notare che ciò si debbe intendere ancora dei rettangoli *corrispondenti*. Il punto V si supponga indeterminatamente prossimo al punto C; saranno le intercette CO, CN, CM indeterminatamente piccole. Le rette AC, CB, CD del parallelogrammo $BCDA$ indichino le potenze allo stesso punto C applicate, e giusta il principio della composizion delle forze, facenti equilibrio quando AC si prenda in senso contrario: se il punto C suppongasi trasferito in V, saranno CO, CM, CN le velocità virtuali delle potenze AC, BC, CD. Dunque se tre potenze nello stesso piano collocate fanno equilibrio, riesce vero che i prodotti delle potenze nelle rispettive velocità virtuali sono eguali a zero, e che il principio delle virtuali velocità dal principio della composizion delle forze necessariamente procede. E' inutile dopo ciò che dicemmo di sopra dimostrare che si verifica ancora la proposizione inversa, cioè che dal principio delle velocità virtuali dipende il principio della composizione e risoluzion delle forze. Una breve e geometrica dimostrazione può vedersene altresì nella settima delle lettere dei principj di Meccanica di Vincenzo Riccati al P. Virgilio Cavina.

Se le forze intorno a un punto fossero tre anche fuori di piano, si troverà la composta di due, la quale si comporrà colla terza; e il prodotto della seconda composta nella sua velocità virtuale sarà eguale al prodotto della prima composta nella rispettiva velocità vir-

tuale più il prodotto nella terza della sua; ma il prodotto della prima composta nella sua velocità virtuale eguaglia i prodotti delle due prime nelle respettive velocità virtuali; dunque il prodotto della seconda composta nella sua velocità virtuale eguaglia i tre prodotti delle tre forze nelle respettive velocità virtuali, e se il prodotto della composta seconda nella sua velocità virtuale si prenda col segno contrario, i quattro prodotti saranno eguali a zero; ma quando l' equivalente si prende col segno contrario, si ha equilibrio; dunque ancora in questo equilibrio si verifica il principio delle velocità virtuali. Se le forze intorno a un punto fossero quattro, cinque, ec. quante si voglia, e comunque collocate, nella stessa maniera si dimostra che quando sono equilibrate, ha sempre luogo il principio delle velocità virtuali.

La stessa verità dimostrasi risolvendo tutte le forze applicate ad un punto in forze parallele a tre assi nella seguente maniera.

Sieno nel punto A (Fig. IV.) tre rette, AH, AC, AB, indefinite e che s' incrociano scambievolmente ad angoli retti. Dal medesimo punto A si supponga condotta comunque nello spazio una retta AP che colla retta AB faccia l' angolo PAB, che chiamo α, colla AC faccia l'angolo PAC che chiamo β, e finalmente colla retta AH formi l'angolo PAH, che denomino γ. Dal punto F della retta AP preso a piacimento si cali nel piano CAB la perpendicolare FD, e si compia il parallelepipedo rettangolo $ABCDHEFG$, la cui diagonale è AF, la quale si dica δp; AB si dica δx; $AC = \delta y$; $AH = \delta z$; dico essere

$\delta p = cos.\ \alpha\ \delta x + cos.\ \beta\ \delta y + cos.\ \gamma\ \delta z$. Imperocchè, intesa la diagonale AD, è $AF^2 = FD^2 + AD^2$; ma è $AD^2 = AB^2 + BD^2$; dunque $AF^2 = FD^2 + AB^2 + BD^2$, o sia $\delta p^2 = \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2$. S'intenda la diagonale FB del rettangolo $EFDB$. Poichè è AB perpendicolare al piano $EBDF$, formerà con BF un angolo retto. Dunque nel triangolo rettangolo AFB è $1 : cos.\ \alpha = \delta p : \delta x$; laonde è $\delta x = \delta p\ cos.\ \alpha$; e similmente è $\delta y = \delta p\ cos.\ \beta$, e $\delta z = \delta p\ cos.\ \gamma$; sostituiti questi valori nella superiore equazione, sarà

$$\delta p^2 = \delta x\ cos.\ \alpha\ \delta p + \delta y\ cos.\ \beta\ \delta p + \delta z\ cos.\ \gamma\ \delta p;$$

o sia $\delta p = \delta x\ cos.\ \alpha + \delta y\ cos.\ \beta + \delta z\ cos.\ \gamma$, come dovevasi dimostrare.

Da A si tiri nello spazio un'altra retta a piacimento AP', e da F in AP' si cali la normale FL, ed AL si denomini $\delta p'$; e sieno α', β', γ' gli angoli formati dalla retta AP' colle tre rette AB, AC, AH: se da L si calino le normali sulle rette indefinite AB, AC, AH; e se le intercette tra 'l punto A e le normali stesse si dicano $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, in pari guisa addimostrasi essere $\delta p' = \delta x'\ cos.\ \alpha' + \delta y'\ cos.\ \beta' + \delta z'\ cos.\ \gamma'$; se tirisi ancora una terza retta AP'', sarà parimente $\delta p'' = \delta x''\ cos.\ \alpha''$, ec. La dimostrazione è sempre la stessa, poichè le quantità di cui constano siffatte equazioni quantunque variabili sono però dipendenti nella stessa maniera dalla posizion delle rette AP, AP', AP', ec. in rispetto agli assi AB, AC, AH.

Dal punto L sia LM normale al piano $ABDC$, e si conduca la DM, che sarà la proiezione ortogonale della FL nel piano $ACDB$, e sia prolungata

$B\,D$ finchè concorra in Q con $M\,N$ tirata dal punto M parallela a $C\,D$. Finalmente sia $L\,V$ normale ad $F\,D$ e siano $M\,N = \delta x'$, $A\,N = \delta y'$, $M\,L = \delta z'$, e chiamata $F\,L = \delta r$, avremo

$\delta r^2 = F\,V^2 + V\,L^2 = F\,V^2 + D\,M^2 = F\,V^2 + D\,Q^2 + Q\,M^2$; ma

$F\,V = \delta z - \delta z'$, $D\,Q = \delta y - \delta y'$, $Q\,M' = \delta x - \delta x'$; dunque sarà

$$\delta r^2 = \delta z^2 + \delta z'^2 - 2\,\delta z\,\delta z';$$
$$+ \delta y^2 + \delta y'^2 - 2\,\delta y\,\delta y'$$
$$+ \delta x^2 + \delta x'^2 - 2\,\delta x\,\delta x'$$

ma $\delta z^2 + \delta y^2 + \delta x^2 = \delta p^2$, e $\delta z'^2 + \delta y'^2 + \delta x'^2 = \delta p'^2$; dunque

$\delta r^2 = \delta p^2 + \delta p'^2 - 2\,(+\,\delta z\,\delta z' + \delta y\,\delta y' + \delta x\,\delta x')$;

ma $\delta r^2 = \delta p^2 - \delta p'^2$;

dunque $2\,\delta p'^2 - 2\,(\delta z\,\delta z' + \delta y\,\delta y' + \delta x\,\delta x') = 0$,

o sia $\delta p'^2 = \delta z\,\delta z' + \delta y\,\delta y' + \delta x\,\delta x'$;

ma $\delta z' = \delta p'\,cos.\,\gamma'$, $\delta y' = \delta p'\,cos.\,\beta'$, $\delta x' = \delta p'\,cos\,\alpha'$;

dunque sostituendo, $\delta p' = \delta z\,cos.\,\gamma' + \delta y\,cos.\,\beta' + \delta x\,cos.\,\alpha'$. Così si dimostrerà che condotta dal punto A altra retta $A\,p''$ ec. e fatta la stessa costruzione sarà

$\delta p'' = \delta z\ cos.\ \gamma'' + \delta y\ cos.\ \beta'' + \delta x\ cos.\ \alpha''$; $\delta p''' = \delta z\,cos.\,\gamma'''$ ec.

Dato adunque il parallelepipedo rettangolo, come sopra, se nello spazio si tiri una retta qualunque $A\,P'$ e

dall' altro estremo F della diagonale AL si conduca FL normale ad AP, sarà $AL = AB\ cos.\ LAB + AC\ cos.\ LAC + AH\ cos.\ LAH$; teorema elegante ed utile che appartiene al parallelepipedo rettangolo.

Per la direzione delle rette AP', AP'', AP''' il punto A sia sollecitato dalle potenze P', P'', P''', ec; tra loro equilibrate, e ciascuna risolvasi in tre secondo la direzion de' tre assi AB, AC, AH; e queste sieno Q', Q'' ec. R', R'' ec. S', S'' ec. Sarà $Q' = P'\ cos.\ \alpha'$, $Q'' = P''\ cos.\ \alpha''$ ec. $R' = P'\ cos.\ \beta'$, $R'' = P''\ cos.\ \beta''$ ec. $S' = P'\ cos.\ \gamma'$, $S'' = P''\ cos.\ \gamma''$ cc. Poichè tutte queste potenze fanno equilibrio, sarà la somma $Q' + Q''$ ec. $= 0$; $R' + R''$ ec. $= 0$; ed $S' + S''$ ec. $= 0$; altrimenti di queste potrebbonsi comporre tre potenze faccenti equilibrio senza giacere nel piano medesimo. Supponghiamo il punto A traslocato da A in un punto qualunque F, e si compisca il parallelepipedo rettangolo $ABDCHEFG$, la cui diagonale sia AF: il punto F rispetto all' asse AB percorre la stessa AB lato del parallelepipedo, e rispetto ad AC percorre la medesima AC, e rispetto ad AH percorre la AH medesima. AB dunque, quando il moto sia minimo, è la velocità virtuale di tutte le potenze Q', o sia di tutte le $P'\ cos.\ \alpha'$; AC è la velocità virtuale di tutte le potenze R', o sia delle $P'\ cos.\ \beta'$. ed AH lo è di tutte le S', o sia di tutte le $P'\ cos.\ \gamma'$; Dunque la somma di tutte le $P'\delta x\ cos.\ \alpha' + P'\delta y\ cos.\ \beta' + P'\delta z\ cos.\ \gamma' + P''\delta x\ cos.\ \alpha'' + P''\delta y\ cos.\ \beta'' + P''\delta z\ cos.\ \gamma'' + P'''\delta x\ cos.\ \alpha''' + P'''\delta y\ cos.\ \beta''' + P'''\delta z\ cos.\ \gamma'''$ ec. $= 0$. Ma abbiamo dimostrato AL, o sia $\delta p' = \delta z\ cos.\ \gamma' + \delta y\ cos.\ \beta' + \delta x\ cos.\ \alpha'$, $\delta p'' = \delta z\ cos.\ \gamma'' + \delta y\ cos.\ \beta'' +$

$\delta x \cos. \alpha''$, $\delta p''' = \delta z \cos. \gamma'''$ ec., dunque sostituendo avremo generalmente, e perciò quando si tratta ancora dei δ indeterminatamente piccoli, $P' \delta p' + P'' \delta p'' + P''' \delta p'''$ ec. $= 0$; vale a dire quando le potenze applicate a un sol punto fanno equilibrio, ha luogo il principio delle virtuali velocità. E poichè tale dimostrazione dal principio della risoluzion delle forze geometricamente deducesi, il quale abbiamo detto essere di metafisica e geometrica certezza, per questo geometricamente risulta che il principio delle velocità virtuali nell'equilibrio di cui si tratta si verifica costantemente con certezza geometrica; e per lo contrario se rapporto alle potenze ad un punto applicate la legge si serba delle virtuali velocità, non è da contendersi l'esistenza dell'equilibrio, perchè, come dianzi dicemmo, dal principio delle velocità virtuali geometricamente ricavasi il principio della composizione e risoluzione delle forze, il quale ogni qualvolta abbia luogo, è infallibile l'equilibrio.

Ma finquì si discorse nella supposizione che uno sia il punto a cui sono applicate forze che fannosi equilibrio, e che perciò soltanto muovasi di moto minimo rettilineo. Se poi supponghiamo che siano più punti in qualunque modo insieme connessi, e muovansi ancora all' intorno d'un asse qualsiasi, chi è che subito non ravvisi che la teoria di siffatto moto dal principio del vette dipende necessariamente? E se a questo pure non si possa ricusare la geometrica convinzione, poichè geometricamente dimostrasi, che l'equilibrio del vette è sempre congiunto al principio delle velocità virtuali, nemmeno al principio delle velocità virtuali il pregio di una sommissima convinzione sarà

da contrastarsi. Benchè, come notammo, alcuni son d' avviso che una dimostrazione rigorosa della teoria del vette da Archimede e dopo lui da altri uomini prestantissimi investigata lasci tuttor desiderio di se. Se così è, sarà per questi vero verissimo in ogni equilibrio il principio delle virtuali velocità; e lo stesso dicasi inversamente; ma la sua certezza dipendendo in parte da un principio sulla sola sperienza poggiato, non può riputarsi giunta al sommo grado.

Il sig. Fossombroni però non può dirsi di questo sentimento; poichè dove stabilisce i fondamenti della sua teoria sembra che ammetta la certezza dell' equilibrio del vette allo stesso parallelo colla certezza dell'equilibrio della composizione delle forze; cioè pare che le supponga ambedue dimostrate geometricamente. „ *E' chiaro,* egli dice senz' altro aggiugnere, *che le condizioni dell'equilibrio della data linea saranno espresse dalle due equazioni* $P' + P'' + P''' +$ ec. $= 0$; questa riguarda i moti rettilinei, e senza contrasto ritiensi fiancheggiata da geometrica dimostrazione; $y' P' + y'' P'' + y''' P''' +$ ec. $= 0$; questa al moto di vertigine si riferisce, certamente perchè a stabilire l' equilibrio pieno e perfetto conviene escludere la possibilità di qualunque moto, e perciò quello di rotazione ancora intorno qualsivoglia asse, onde la somma dei prodotti di ciascuna potenza nella sua distanza respettiva dall' asse medesimo debbe anch' essa eguagliarsi allo zero; ma, come sopra abbiamo esposto, non vedesi che tutti i matematici convengano generalmente in attribuire ancora a questa equazione il massimo grado di certezza; dunque dovremo essere ancor noi del sentimento di

quelli che opinano avere il principio di risoluzion delle forze e di composizione per indivisibil compagna l'infallibilità metafisica; quello del vette, il patrocinio soltanto della continua e costante esperienza, e finalmente quello delle velocità virtuali che da' due precedenti deducesi, non poter maggior grado di certezza acquistare di quello che si ravvisa nel principio del vette. Ed in fatti le molte dimostrazioni che mi è riescito di esaminare della legge del vette, dedotte dal principio della ragion sufficiente, ovvero da quello della composizione delle forze, benchè palesino la dottrina e l'ingegno dei loro celebri autori, lasciano tuttavia il dubbio, se sia lecito, metafisicamente e geometricamente parlando, di trasportare due forze applicate a due punti del vette in un sol punto, dove concorrono le loro direzioni; lo che essere lecitissimo mostra la costante esperienza. Non parlo delle dimostrazioni della legge del vette, prese dal moto, il quale suppone le leggi galilcane della potenza costante, poichè è notissimo che dalla sola esperienza ebbero origine, e che la sola esperienza le ha talmente poste in salvo dalla pertinace guerra loro fatta, che da molto tempo non avvi mattematico che non si affidi totalmente alle medesime, o sia quella che esprime la relazione tra la velocità e lo spazio che domina in qualunque moto, in direzione o no della forza; legge principale: o sien le altre che esprimon la relazione del tempo e della velocità, del tempo e dello spazio; leggi che si possono adoperare soltanto trattandosi di moto in direzione della forza medesima. Di questo argomento Vincenzo e Giordano Riccati tra gli altri dottamente trattarono.

Ma prima di lasciare il nostro principio delle velocità virtuali non rincresca che si rechi un esempio con cui speditamente i problemi difficili di meccanica si traducono al calcolo algebraico.

L'arco AOB (Fig. V.) nelle estremità A, B fermato stabilmente consti di minimi cunei sciolti, omogenei, di grossezza e altezza uguali, ottimamente uniti, gravi, di mole comunque; inoltre abbia i centri di gravità dei cunei medesimi disposti in linea AOB; di questa si cerca la natura o sia l'equazione nel caso che l'arco si sostenga in equilibrio.

Sia la curva AOB riferita all'asse AB; x, u, s, p disegnino l'ascissa AP, l'ordinata PM, l'arco AM, e il peso di ciascun cuneo; supponghiamo l'arco dalla situazione AOB passato nell'altra ALB, che differisca dalla prima con differenza minima quanto si voglia, l'ordinata $PM = u$ appartenente all'ascissa $AP = x$ avrà ricevuto la variazione minima MN, che diremo ω, per distinguerla da du, che disegna la variazione che riceve u al variare x della minima quantità dx. Ora il principio delle velocità virtuali esige in ogni equilibrio, che supposto un minimo moto comunque piccolo la somma dei prodotti della forza di ciascun cuneo, che viene espressa per $p\,d\,s$ nei rispettivi spazietti di accostamento e scostamento, che abbiamo nominati ω, sia eguale a zero, cioè che sia $\int p\,d\,s = 0$. Dunque se si determini una funzione delle coordinate x, y, la cui minima variazione sia $\int p\,d\,s$, differenziando attualmente, e ponendo il differenziale eguale a zero, si avrà l'equazione ricercata. Ecco immediatamente senza alcun artificio di sostituzione di

forze o di masse tradotto il problema dalla meccanica in balia dell' algebra e della geometria, e a questi efficaci strumenti coraggiosamente fidato. Essendo p proporzionale alla ds, dovrà porsi $\int \omega\, ds = 0$. Si distenda la curva AOD (Fig. V e VI) in linea retta, e sia HV, e agli stessi punti M si collochino le ordinate MF eguali alle PM eguali ad u della figura prima, onde nasca la curva HFV; supposta una minima variazione della curva AOB, passando per esempio alla situazione ALB, succederà una corrispondente variazione nella curva HFV, e passerà questa alla situazione HTV, e l' ordinate $MF = u$ della curva HFV varieranno della quantità ω; siano le MF ed mC in distanza tra loro minima quanto si voglia, cioè sia $Mm = ds$; $u\,ds$ sarà il minimo elemento dell' area della curva HFV, e tagliando le MF, mG la curva HTV nei punti T, K, lo spazietto $FTKG$ indeterminatamente picciolo, che si può esprimere per $\omega\, ds$ sarà l' elemento della totale variazione dell' area della curva HFV, e $\int \omega\, ds$ sarà la variazione della $\int u\, ds$; e dovendo porsi tal variazione nella curva $AOB = 0$, dovrà essere in questa $\int u\, ds$ un massimo o un minimo. Il problema proposto è mutato adunque nel seguente: trovare l'equazione della curva, che tra tutte dello stesso perimetro, terminate agli stessi punti, chiamato l' arco s, e l' ordinata u, sia $\int u\, ds$ un massimo o un minimo. Questo problema, adoperando i metodi dei massimi e dei minimi dell' Eulero e di Lagrangia, si risolve facilmente, e si ottiene l' equazione $\frac{a\, du}{\sqrt{(b+u)^2 - a^2}} = dx$, e posto $b + u = y$, nasce

$\frac{a\,dy}{\sqrt{y^2-a^2}} = x$, equazione della catenaria; a, b sono due costanti arbitrarie. Vedasi il trattato intorno agli equilibrii di Vincenzo Angiulli Professore di Mattematica pubblicato in Napoli nel 1770, in cui l' equilibrio dei solidi e dei fluidi è dimostrato col principio delle azioni, o sia delle velocità virtuali.

SU UN DENTE, E PARTE DI MANDIBOLA D' UN MASTODONTE

trovati presso la Rocchetta nel Dipartimento del Tanaro.

A sua Eccellenza Monsignor Giacinto Della Torre Arcivescovo di Torino, Conte dell'Impero, Senatore, Cavaliere della Legion d'Onore ec.ec.

Milano 20 Giugno 1808.

LETTERA

DI CARLO AMORETTI

ricevuta a' primi di luglio 1808.

Se altre volte V. E. aggradì la notizia degli scheletri di cetacei e quadrupedi trovati ne' colli Piacentini *(a)*, de' quali l' amico mio sig. *Cortesi* pubblicò poi la descrizione *(b)*, ora potrei aggiugner cosa che le accrescerebbe la maraviglia, narrandole come lo stesso indagatore degli avanzi de' vetusti animali, ebbe la sorte di trovare a 200 piedi perpendicolarmente sotto l'elefante un' intero scheletro di Balena, che ha sette metri di lunghezza, e l' ha trovato sotto un ammasso immenso di coralli, di sassi traforati da mituli, e non lungi dalle ferrigne discoliti, che riputate sono l' osso di que' molluschi numerosissimi, che notanti ora soltan-

---

(a) Nuova Scelta d' Opuscoli. Tom. I. pag. 39.
(b) Ivi. Tom. I. pagg. 289, 379.

to ne' mari del Sud son pascolo a grossi Cetacei, i di cui progenitori, la parte carnosa digerendo, l' osso fra gli escrementi rigettarono, quando il mare tutta la valle del Po, e parte delle Alpi e dell' Apennino occupava. Ma poichè di tutto ciò ella amerà meglio leggere il ragguaglio che ne dà il sig. *Cortesi* medesimo *(a)*, io interterrolla delle ossa d' altro animale, che tanto più interessar deve la di lei curiosità quanto che è men noto, ed appartiene a cotesta regione in cui ella risplende primo nell' ecclesiastico ceto.

V. E. conosce nell' Astigiano (dipartimento del Tanaro) il vetusto castello della Rocchetta di Tanaro degli Es-marchesi d' Incisa, che vuolsi con buoni fondamenti parte del retaggio degli eredi d' Aleramo investitone da Carlo Magno. Il sig. Bonaventura Incisa possiede unitamente al fratel maggiore que' fondi ereditarj, de' quali alcuni sono il suo speciale partaggio, e fra questi v' è il colle detto Monte-bruna. Egli, colto signore, comechè i suoi studj abbia rivolti a ricerche morali e metafisiche, della qual cosa ha pubblicati in parecchie opericciuole de' commendevoli saggi; pure e ai vantaggi dell' agricoltura attende, e all' abbellimento di que' contorni; nè trascura al tempo stesso ciò che ha rapporto all' esame della natura, e ai monumenti delle antiche epoche della Terra.

Già sapeasi che tutti i colli subapennini mostrano avanzi di marine conchiglie d' ogni maniera; e veduto egli avea che quel colle, che scortecciava, dirò così, per renderlo più ferace e più bello, molte specie ne

(a) Ivi. Tom. II. pagg. 160, e 229.

conteneva. Mandommi di fatti delle ostriche, de' pettini, delle veneri, delle came, delle neriti, de' turbini, degli echini, e molte altre specie di marini crostacei, che vano è qui tutte rammemorare.

Il sig. Incisa trovò in quel suo fondo anche degli indizj di tetrapodi; e unitamente alle conchiglie femmi avere la base con due ramificazioni d' un impietrito corno di daino ben riconoscibile. Altri prima di lui simili avanzi di terrestri animali in que' contorni sotterra trovarono: fra i quali il sig. Frailino di Butigliera dissotterrò lo scheletro d' un grand' elefante, e femmi l' amicizia di mandarmi un pezzo di zanna, onde giudicare della mole dell' intero animale; e Madama Busca nata Serbelloni ebbe non ha guari da Castel-Belbo presso il Tanaro, fondo d'eredità paterna, il corno d' un bue colà trovato, che, sebbene mancante alla cima, ha tuttavia tre piedi di lunghezza, e sebbene spogliato della superficie cornea, ha nove pollici di circonferenza alla base, la quale sorgea da enorme cranio, che i suoi contadini fecero in pezzi, e dispersero *(a)*.

Ma un pezzo ben più importante, sebbene di minor mole, appartenente ad altro animale, il caso fè trovare nel suo Monte-bruna al sig. Incisa. E' questo un dente, il quale da zappatori fu dissotterrato e gettato, come inutil sasso od osso fuori del campo con

(a) Siffatti enormi bovi, de' quali ne' musei veggiamo non infrequenti cranii e corna, ora più non trovansi vivi; ma convien dire che non fossero infrequenti in queste contrade. Un cranio privo di corna sen vede in Milano in casa del sig. Rossi appartenente dianzi al Museo Archinto, ed un altro men grande, che facea parte del museo Settaliano, n' abbiamo nella nostra Biblioteca Ambrosiana.

altre ossa, che, men dure essendo del dente, furono presto stritolate e disperse. Quando egli ebbe il dente nelle mani, sebbene non potesse determinare a quale specie avesse appartenuto, pure ben lo conobbe degno di essere conservato. Avendolo poi seco recato a Milano, a me cui onora di sua amicizia, mostrollo e affidarlo si compiacque; e nuova pur io trovai quella forma di dente, che nè agli elefantini, nè a' rinocerontei, nè a quelli dell' ippopotamo somiglia. Ma confrontandolo poi colle figure e colle descrizioni del dente trovato presso Simore in Linguadocca, di cui molto parlarono i Zoologi, vi riscontrai tal somiglianza che 'l giudicai della medesima specie.

E quale specie è codesta? Il dente mostra abbastanza d' aver appartenuto ad enorme quadrupede: del che più certo argomento ebbi, quando, dopo alcuni mesi, lo stesso signore mandommi quella parte di mascella in cui il dente stava dianzi, la quale, sebbene trovata qualche tempo dopo, e a qualche distanza, ben mostra all' esatta corrispondenza delle parti solcate e rilevate, e specialmente della radice del dente *a* (Vedi le Tavole I e III), che essa lo conteneva. La Tavola I mostra il dente veduto di fianco: la II lo presenta veduto dall' alto: la III mostra la mandibola col solco ch' era occupato dal nervo mascellare, e ivi co' puntini è accennato il luogo che in essa e sovr'essa occupava il dente *(a)*.

La forma e la grandezza di questo e della man-

(a) Le Tavole sono state disegnate sul marmo dalla sig. Rosalbina Bernini, e stampate in Milano dal sig. De Werz col metodo detto *litografico*, o *poliautografico*.

dibola sono abbastanza espresse nelle Tavole; ma esse non presentano la bellezza del dente, e 'l suo colore. Questo in alcune parti è quello della turchese, in altre è d'un bianco latteo, ma non oserei dirlo di color di cera come parve a taluno; e a luogo a luogo, specialmente ov' era abbracciato dalla mandibola, mostra delle dendriti, cosa non infrequente nelle ossa fossili. Lo smalto del dente è intero e perfetto, e grosso assai; e le altre parti pur sono assai dure, ma non selcificate a segno di dar fuoco alla percossa dell'acciarino. La parte inferiore, ossia la radice del dente fa effervescenza cogli acidi; ond' è chiaro che ha serbata l' indole calcare delle ossa.

Per meglio determinare a quale specie l' animale appartenesse sarebbe stato necessario il trovare, o 'l conservare le altre sue ossa, onde formarne in tutto o in molta parte lo scheletro; ma, sebbene altro dente dell' animale medesimo sia stato trovato nell' Astigiano, e forse presso la Rocchetta, come più sotto vedremo, finora i sigg. Incisa non altro osso più trovarono fuori che un altro spezzame, il quale, benchè guasto e quasi interamente spoglio della liscia superficie, pur mostra d' essere l' estremità posteriore della mandibola stessa, vedendovisi ben distinta l' apofisi.

Mentre di questo dente occupavami, e cercavane le notizie che dare men poteano i libri e gli uomini nella Zoologia versati, fra i quali mi compiaccio di annoverare il sig. Cav. *Faujas de S. Fonds*, che meco il dente vide, esaminollo, e lo fè disegnare, seppi da lui che due denti, i quali aveano con questo molta analogia, serbavansi a Padova, uno nel museo di

quella r. Università, e l'altro presso il coltissimo Naturalista sig. *Niccolò Darío*: ed essendomene procurati i disegni per mezzo dell'amico mio sig. Prof. *Malacarne*, li trovai analoghi bensì, ma molto men belli, cioè molto più logori e consumati sia per l'età degli animali, sia dal loro stesso sepolcro. Trovati furono questi nelle Alpi di là non lontane; e quello del sig. Darío precisamente ne' monti di Ceneda. Altri due ne furono poscia trovati ne' monti appartenenti al dipartimento del Bachiglione, veduti dal sig. *Marzari-Pencati* incaricato ora dal Governo di cercare e raccogliere gli oggetti di Storia Naturale, il quale, non potendo avere que'denti da chi li possiede, li fece disegnare: dal che si può argomentare, che l'animale, il quale n' era fornito, vivesse del pari (Dio sa in quali epoche!) negli Apennini, e nelle Alpi.

Ma ben più esteso trovai poscia il soggiorno di questi animali sulla Terra. Essendo nell' anno scorso andato a Vienna d'Austria il sig. Barone Giuseppe di Brudern, colto Signore Ungherese, recommi in dono la metà d'un dente trovato nelle sue Terre (ove condotto avrebbemi ad esaminare que' luoghi se non mi si fosse negato d'entrare in quel regno), dente affatto simile alla metà posteriore di quello della Rocchetta, se non che ha interamente preso il colore della turchese, ove più ove men cupo.

Più istruttiva e più interessante per me fu la mascella fossile, che potei a mio agio esaminare nell' imp: museo de' Fossili di quella Capitale. Tal mascella contiene due denti: uno, per la forma e per la disposizione delle prominenze troncate (che chiamerò *foglie*, co-

me i Francesi chiamanle *trefles*), è affatto simile al nostro; e l'altro ha le punte rilevate coniche, e acute, simili al *Maumouth* di *Hunter*, che vedesi disegnato nella sua memoria inserita nelle *Transazioni filosofiche* per l'anno 1768, e nella nostra *Scelta d'Opuscoli (a)*. Sono al primo aspetto sì poco somiglianti fra loro que' due denti, che potrebbono agevolmente credersi di due animali diversi, se non si vedessero in una stessa mandibola. Questo però non troverassi strano da chi ha veduti i denti dell'ippopotamo, il quale nella stessa mascella ha nella parte anteriore i denti piatti a foglie, molto simili a quelle di cui trattiamo; e nella posteriore gli ha acuti e conici quali appunto si veggono nella mascella Viennese. Questa, come fummi detto colà dal cortese e colto Custode di quel museo, è stata dissotterrata nella Moravia.

Io me ne stava tuttavia nell' incertezza sulla storia naturale e l'esistenza di questo animale, finchè, al mio ritorno in Italia, trovai negli *Annali del museo* di Parigi un' eccellente memoria del cel. sig. *Cuvier (b)* ingegnoso e fortunato indagatore de' resti sotterranei d'animali noti e ignoti, nella quale espone tutte le ricerche da lui fatte su quest' oggetto; e vidi che per le moltiplicate sue indagini riuscito eragli non solo di determinare la specie dell' animale a cui simili denti appartennero, ma pur di separarne e indicarne le varietà, e di darcene anche un intero scheletro, preso da quello che *Peale* ha formato colle ossa fossili di quest' animale trovate in America.

(a) Tom. I. in 4.° pag. 196.
(b) Ann. du Musaeum. Tom. VIII.

Egli dimostrò (e nessuno meglio di lui versatissimo nella Notomia Comparata dimostrarlo poteva), che sebbene i denti di quest' animale trovinsi in tutte le parti del Globo, dall' agghiacciata Siberia, ove trovolli *Pallas*, sino agli arsi paesi equinoziali, ove li vide *Humbold*, pur l' animale vivente non trovasi in nessuna conosciuta regione: onde, dovendo dargli un nome, lo trasse dalla forma originaria de' suoi denti, chiamandolo *Mastodonte*, cioè animale a denti *mammellonati*, che noi diremmo fatti a capezzolo.

Io non ridirò qui ciò che V. E. può leggere nella citata memoria del sig. *Cuvier*; ma solo esporrolle alcune osservazioni, che m' avvenne di fare leggendola. — Facendo egli menzione d' un dente simile a quello della Rocchetta, ma assai più guasto, come pur vedesi dal disegno *(a)* donato al sig. *G. A. Deluc* da chi trovollo nelle vicinanze d'Asti, si può ben ragionevolmente sospettare che quel dente fosse sepolto e siasi trovato presso al nostro, e allo stesso animale abbia appartenuto. Che se fu dente d'altro individuo, avremmo allora qui moltiplicati i mastodonti. Così la moltiplicità di questi animali in Italia dimostrano i denti mentovati dallo stesso sig. *Cuvier* trovati sul Sanese, in Valdarno, e sui colli Bolognesi, e descritti da *Baldassari*, da *Fabbroni*, e da *Monti*; ai quali aggiugnere si devono i quattro denti trovati ne' monti Veneti, de' quali già parlossi.

Non farà maraviglia che il nostro sì grosso dente non abbia appartenuto alla più grande specie de' Ma-

(a) *Mém. de M.* Cuvier. *Pl. II. fig. 7.*

stodonti, a chi sa di qual enorme mole siano i quadrupedi fossili dell' America Settentrionale, cosicchè nello scorso anno, se crediamo ai pubblici fogli, uno ne fu trovato sulle sponde dell' Ohio di 50 piedi di lunghezza; ma tuttavia convien dire che di gran mole fosse l' animale della Rocchetta, se, giusta le osservazioni del sullodato *Cuvier*, doveva avere otto di que' denti in bocca, poichè giovane era ancora non essendo per anco sbucciati gli ultimi coni: e ben alte n'erano le mandibole a giudicarne da' soli spezzami che se ne conservarono. Più grande ancora dobbiamo figurarcelo, se, oltre i denti, aveva zanne uguali alle elefantine.

Se uno degli argomenti d' analogia ond' inferirne che il nostro Mastodonte appartenesse alla seconda specie anzichè alla prima, vuole desumersi dallo starne lo scheletro presso a marine conchiglie, questa circostanza, come già osservai, certamente non manca all' animal nostro; come non mancagli la circostanza agli altri comune, d' essersi trovato a poca profondità: dal che argomentasi che questa razza d' animali sia perita nell' ultima catastrofe sofferta dal Globo terracqueo.

Ma la circostanza più decisiva a dimostrare che alla grande specie di Mastodonte il nostro non appartenne, è quella della scanalatura o solcatura de' denti, che, secondo *Cuvier*, in quella specie si osserva, e che non è certamente nel dente di cui si tratta, il quale ne' suoi coni, e in tutto lo smalto, è interamente liscio e lucente.

Osserva il medesimo Zoologo che in generale i denti del Mastodonte hanno da 6 a 10 coni o foglie; e tale è il nostro, il quale inoltre ha all' estremità po-

steriore in *b* un germe di cono non isbucciato ancora; e poichè rotta è l' estremità anteriore, potrebbe anche sospettarsi che in origine ne avesse dodici: numero, che in alcuni denti mastodontei, e specialmente in quello di Trévoux da *Cuvier* è stato osservato.

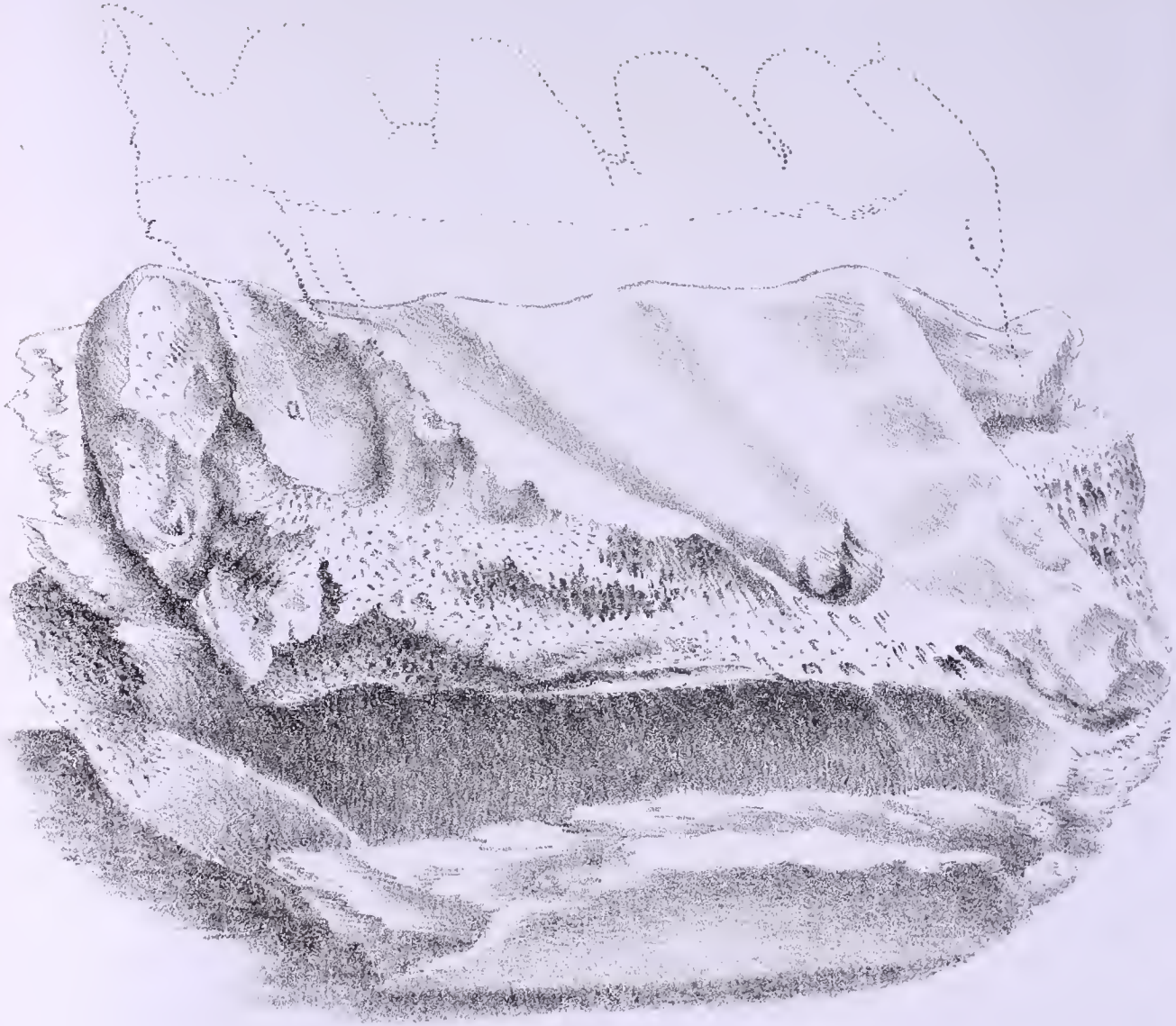
Ma non così analogo ai denti da lui esaminati è il nostro riguardo all'essere più da un lato consumato e guasto che dall'altro. Dalla ispezione del dente veggo, che tal differenza, se pur v' è, è ben poco sensibile. Bensì evidente è la degradazione de' coni, che nella parte anteriore sono molto più consumati per la detrizione, e quindi più dilatati, mentre gli ultimi sono pressochè interi, come mostrano le stesse figure delle Tavole I, e II: ed è questo pure un argomento della progressione con cui consumansi, e succedonsi i denti dalla parte posteriore all' anteriore, siccome si osserva tuttora negli elefanti.

E' chiaro per l'ispezione della mandibola che questa e 'l dente appartennero alla parte destra della mascella inferiore; e pare che alla medesima appartenesse anche il pezzo in cui si è conservata l' apofisi.

E' sperabile che il tempo e le continuate ricerche del sig. Incisa, e degli ingegnosi e studiosi suoi figliuoli, altre ossa facciano trovare, onde meglio conoscere quest' animale, che forse abitò l' Italia prima che la popolassero gli uomini.

Intanto io sono ben contento che il ragguaglio di questo dente, e le poche osservazioni fatte su di esso, abbianmi fornita l'occasione di rinnovare all' E. V. i sinceri miei sentimenti di profonda stima, di riconoscenza, e d' ossequio.

Fig 1.



APPENDICE

alle memorie poste alle pagine 311 e 327

DI MICHELE ARALDI

presentata il di primo di luglio 1808

Nella presente appendice io intendo di farmi prima di tutto, e sopra tutto incontro a un rimprovero, a cui mi espone la nota *(e)* collocata alla pagina 355. Taluno potrebbe trarre innanzi e ammonirmi che a gran torto io mi annunzio in essa persuaso che l'acuto Lambert appoggi, o unicamente, o principalmente la propension sua a credere provveduti di elasticità i liquidi, ai vantaggi che nelle teorie idrodinamiche ottengonsi dal principio della conservazione delle forze vive. In fatti dopo scritta non solo ma stampata, e renduta conseguentemente indelebile quella nota m' avvidi ch' ei ritorna su lo stesso argomento in altro suo scritto, postumo anch'esso, e cui non pertanto il sig. Beguelin riputandolo degno dell' illustre defunto non esitò ad inserire nel tomo per l' anno 1784 degli atti di Berlino. Ben dopo questa ingenua confessione mi tro-

vo in grado di aggiugnere, che lo scritto mentovato, lungi d'indebolire i miei dubbj, quasi gli avvalora, per tal modo fiacchi mi sembrano i motivi addotti da Lambert a sostegno del suo assunto. Ci si offre a mio avviso in questo incontro un esempio della forza della prevenzione, per cui gl'ingegni anche più svegliati sbagliano per grandi e fondati argomenti di niun valore. Tale senza niuno scrupolo sembra che possa dichiararsi quello ch'ei crede di aver rinvenuto nel noto fenomeno delle lagrime Bataviche; delle quali si sa che rompendo il filetto o picciuolo in cui terminano, vanno tostamente in minuzzoli, che vengono scagliati all'intorno non senza risico di chi per avventura tenga incautamente il viso, e gli occhi esposti alle offese. Trova egli molta analogìa e una quasi assoluta identità tra questo fenomeno e quello degli sprizzi di minutissime, ne sempre forse visibili goccioline, che secondo lui accompagnano lo spezzamento subito delle bolle di quella spuma in cui sollevasi l'acqua che dopo di avervi dianzi sciolto poco sapone venga con forza agitata, e sbattuta. Vincoli tali egli scorge tra questi due fenomeni che come del primo non ha dubbio che non derivi dalla elasticità del vetro, così nel secondo ei vede una prova non equivoca della elasticità dell' acqua. Ma da vero che i caratteri di vera prova si penerà a riconoscerli in una analogia sì remota, ove a qualche apparente somiglianza accoppiansi tante disparità. Giova qui rammemorare l'esempio recato altrove de' ciottoli piani, e lisci che lanciati obbliquamente contro l'acqua ne rimbalzano. A prima vista direbbesi ch' esso rende testimonianza della elasticità dell' acqua, e parecchi infatti ne furon se-

dotti. Pur si è veduto ch'esso vuolsi interpretare di una guisa diversa assai; che a produrre i rimbalzi qualche volta reiterati e consecutivi interviene il subito e poco profondo avvallamento dell'acqua percossa che cede un tal poco, e torce il ciottolo dalla sua direzione obbligandolo a scender prima, poi a salire senza molto discapito dell'impeto impressogli. Potrei citar l'altro fatto delle gocciole che lasciate cader sull'acqua ne vengono ripercosse verso l'alto; del qual fatto mi lusingo di aver mostrato come senza l'intervento della elasticità dell'acqua sia lecito di spiegarlo.

Ma voglio piuttosto stringermi alquanto più d'appresso con Lambert, e chiedergli se a parer suo la mera elasticità del vetro, vale a dire, comune ad ogni maniera e foggia di vetri basti a render ragione del fenomeno delle lagrime Bataviche? Eh che palesemente è mestieri concepire che in quelle lagrime l'elasticità rimanga dependentemente dalla loro preparazione, e conformazione in modo speziale, e singolare anzi modificata. Io chieggo dunque se egli opini che la giunta del sapone e dell'agitazione concilj alla elasticità dell'acqua sollevata in bolle, ed in ispumà una modificazione per l'una parte conforme precisamente a quella cui è d'uopo ammettere nelle lagrime, e per l'altra richiesta a rendere, quali suppongonsi, identici i due fenomeni. Qual prova diretta può egli recarsi di una supposizion tale in tutto gratuita, e che non pertanto in quel confronto trovasi necessariamente rinchiusa?

E passando oltre, infette pure di mere e illecite ipotesi sono a mio giudizio le considerazioni, per le

quali egli avvisa di poter rivolgere a sostegno della elasticità de' liquidi il principio dell' uguaglianza di pressione esercitata e sofferta da ogni particella fluida secondo tutte le direzioni; e quello pure della proporzione che questa pressione serba coll' altezza delle soprastanti colonne. Ei considera i liquidi nell' aspetto di un aggregato di minutissime pallottoline tondeggianti ed elastiche, e cercando a quali conseguenze tragga questo concetto, riesce senza pena a mostrare che ne derivano i due mentovati principj; donde gli sembra sorgere un argomento robustissimo a favore della elasticità de' liquidi. Io mo confesso che il cosiffatto motivo lascia sussistere interamente i miei dubbj. A render giusta quella conchiusione converrebbe che l' elasticità ne' liquidi fosse la condizione indispensabile a render ragione de' principj posti meritamente alla testa delle teorie idrodinamiche. Or tanto è lontano che siavi niuna necessità d' introdurla che tutt' all' opposto è lecito di prescinderne, giacchè bastano, e sovrabbondano all' uopo le proprietà essenziali al fluido, e come tali comprese nella definizione del medesimo. Tal pregevole sopra ogni altra parmi quella che leggesi presso il Neuton. In questa il sommo uomo dichiara fluido quel corpo, le parti del quale cedono ad ogni forza loro applicata, e cedendo muovonsi facilmente fra loro; vale a dire cangiano agevolmente le posizioni loro respettive. Antepongo ad ogni altra questa definizione, e godo vedendola adottata dal Neuton de' nostri tempi nella sua meravigliosa meccanica analitica perchè in essa non entra l'idea delle particelle minime, ed elementari del fluido; in vece si fa menzione delle loro

parti qualunque, alle quali debbe infatti competere d' essere disposte a cedere ad ogni minima forza. Essa molto avvedutamente si restringe a ciò che serve e basta a un tempo a fissare l' essenza del fluido; giacchè il dichiararne le parti qualunque pronte a cedere ad ogni forza coincide col concepirle minimamente coerenti; ed equivale al dire ch' esse riguardo al muoversi fra loro, ossia riguardo ai cambiamenti delle respettive loro posizioni altra resistenza non oppongono, che la loro semplice inerzia; della quale parlando a rigore è lecito il dire che non resiste, come egli è soltanto per un abuso di termini che le si dà il nome di forza; mentre non è dessa che quella proprietà, per cui de' corpi tutti condotti ad agir gli uni su gli altri sempre si avvera che seguono in essi cambiamenti uguali di stato in opposte direzioni. Altri preferirà forse di appellarla quella proprietà, per cui il cambiamento di stato proporzionasi in ogni incontro alle forze, o a meglio dire all' azion delle forze, da cui deriva. I metafisici ravviseranno forse in questa proprietà la ragione di quell' arcana uguaglianza da essi pur in ogni caso ammessa fra le cagioni, e gli effetti. Chieggo scusa d' essermi di nuovo arrestato nello sviluppamento di quel concetto della fluidità, che reputo sopra ogni altro giusto e legittimo. L' ho fatto ripetendo in parte, e in parte allargando le riflessioni su questo punto da me recate nella mia 2ª. Memoria, perchè, se non sono in tutto ingannato, con esso vengono a contrasto le idee dell' Accademico di Berlino. Ei vorrebbe obbligarne a fissar lo sguardo sopra le particelle minime, ultime, elementari, non più fluide per così di-

re dell'aggregazion fluida. Or io dichiaro che in ciò non sono in grado di seguirlo; che simili sforzi mi riescono per lo meno sospetti, parendomi che per essi rimanga contaminata d' ipotesi una nozion cardinale per se stessa chiarissima.

A permettermi di ritenere i miei dubbj basterebbe questa riflessione; pur altre non mancano: perchè io chieggo a quali eccezioni sieno esposte le spiegazioni, per le quali uomini sommi rendevan ragione de' principj della statica de' fluidi, prima che Lambert avvisasse d' introdur la considerazione della elasticità? E' manifesto che da questa si può, e ove si possa, si debbe anzi prescindere, ogni qual volta a niuna vera eccezione sieno esposte quelle spiegazioni. Ma qui sento che alcuno mi avvisa che il principio idrostatico dell' uguaglianza delle pressioni è una verità meramente sperimentale; che il celebre d' Alembert non riconosce in esso che questo carattere; ed è in questo aspetto ch' ei lo assume, e mettendolo alla testa del suo nobil trattato d' idrodinamica, lo sostituisce alla definizione del fluido. Va bene; non cerco quanto sieno fondati gli scrupoli di d' Alembert. Bensì chieggo di nuovo dove pecchino e vengan meno le spiegazioni, per le quali di questo gran fatto attestato dalla sperienza si rende ragione senza far motto della elasticità, e dependentemente soltanto dalla minima coerenza, e mobilità somma delle parti qualunque del liquido. Sarei anche curioso di sapere come l' acuto Lambert impiegar possa utilmente l' elasticità riguardo a un altro gran fatto congiunto per vero dire coll' altro inseparabilmente, ma che in questo incontro sembra le-

cito di staccarne. Intendo la proprietà del liquido di comporsi nell'alto e nella sua superficie a livello. Qui palesemente la semplice disposizione delle sue parti qualunque a cedere ad ogni minima forza compie ed esaurisce la spiegazion del fenomeno, e la considerazione della loro elasticità è manifestamente in tutto superflua. Dopo ciò mi lusingo che mi verrà conceduto di non rinunziare a' miei dubbj. Per altro ad obbligarmi a ritenerli concorrono anche gl' indizj pe' quali mi persuado agevolmente che questi lavori postumi di Lambert non avrebbero, lui vivo, veduta la luce, quali almeno li pubblicò il sig. Beguelin in ciò forse sedotto dall' amicizia verso il celebre defunto; di che non lo biasimo già io, anzi ne lo commendo; giacchè dell'amicizia vera sembra che possa dirsi ch'essa non è tale se non giugne a far travedere su qualche difetto dell' amico.

Recherò di questi indizj un esempio solo che fa d' altronde al mio caso. Si rammemora da Lambert il noto fenomeno dell'ago di acciajo sottile, che collocato bellamente sull' acqua vi si sostiene, e galleggia. Ei non solo lo interpreta accagionandone la resistenza opposta alla discesa dell' ago dalla tegnenza dell' acqua, ma di questa tegnenza ei confida di potere, reiterando i tentativi, rinvenire una specie di misura; della qual sua fiducia è a temer fortemente che i fisici non la divideranno con lui; essi che partendo dal gran Galileo, e scendendo fino al vivente chiarissimo Haüy si mostran d' accordo nell' attribuire il fenomeno a tutt'altra cagione, vale a dire ad un sottile strato di aria aderente all' ago, onde resulti un tutto un tal poco me-

no grave specificamente dell' acqua. Non è a caso che ho fatta pur' ora menzione del Galileo: la giustizia m'impone anzi di aggiugnere che non senza qualche sorpresa e rammarico non l' incontro citato da quelli che versando su questo fenomeno de' corpi più gravi assai dell'acqua, e che non pertanto vi si sostengono a galla, si mostran dimentichi che questo grande restauratore degli studj fisici non solo ne recò il primo la spiegazion vera, ma ne trattò con tale giustezza, e chiarezza, e pienezza che appena lasciò che aggiugnere all' industria de' posteri.

Ma congedandomi omai da Lambert un motivo conforme mi obbliga a rivolgermi verso il chiarissimo sig. Monge, di cui debbo confessare che alquanto tardi e solo dopo stesa e impressa la nota (*a*) mi son avveduto ch' egli in un altro suo scritto (*b*) combatte il vapore vescicolare con più apparato e più nerbo forse di ragioni che non in quello, che nella nota ebbi soltanto in vista, inserito negli annali chimici di Parigi. Lo prego a permettermi di rimanere tuttavia indeciso fra lui, e Saussure, o a meglio dire fra lui e una folla di altri che sono d'accordo col fisico di Ginevra. E prima osservo che contemporaneamente ai nuovi attacchi sofferti per parte dell' illustre Accademico di Parigi dal vapore vescicolare, un altro celebre fisico il sig. I. A. De Luc nelle sue idee su la meteorologia non solo si dichiara disposto ad ammetterne l'esistenza, ma ne reca osservazioni e prove dirette. Ta-

(*a*) Pag. 344

(*b*) Mém. de l'Academie des Sciences de Paris an. 1787.

le parmi la seguente. Ei trovandosi su i monti vide una nùvola formarsi sotto i suoi piedi, alzarsi, avvolgerlo tutto. A suo grand' agio potè contemplarla, sperandone il lembo contro un fondo oscuro, che opportunamente gli offerse il modo di vedere ch' era dessa un aggregato di particelle distinte, moventisi verso l'alto, tondeggianti, cui ei non esita di appellare palloncini rigonfii di fuoco perchè infatti incontrando qualche corpo nel disfarsi e inumidirlo gli comunicano qualche calore. Un po' più oltre egli afferma che questi globicini non erano massicci senz' altro; osserva che alcuni nulla non cedevano nella mole alle gocciole di un' acqua minuta e questi non pertanto ascendevano come i più piccioli. Da vero che si pena a concepire come goccioline di pioggia in un' aria poco mossa viaggiar possano all' insù. Consentono queste osservazioni con quelle di Saussure, e ripercotono su di esse il lume che ne ricevono. In questo fenomeno è riposto l' appoggio migliore del vapore vescicolare, nè a scuoterlo, e infievolirlo bastano di gran lunga a mio avviso le opposizioni dell' accademico francese; nel quale oltre a ciò scorgo qualche parzialità manifesta per la teoria del sig. le Roy ritenuta per vero dire tuttavia in Francia, ma fuori de' confini di questa rigettata al presente dalla più sana parte de' fisici. Secondo lui un indizio non equivoco che massicci sono e non vescicolari i globicini veduti da Saussure sul caffè caldo cadutivi dal seno della colonna di denso fumo che ne sgorga, un indizio tale, dico ci si offre, ed ei lo rinviene e ravvisa nella mobilità grande di detti globicini, per cui rotolano agevolmente su quella superfi-

cie e un lieve soffio basta a spingerli verso gli orli della tazza. E' desso di parere che se fossero incavati sarebbero emisferici, e pochissimo mobili. Ma io gli chieggo come possa concepirsi che globicini in tutto fluidi posino sulla superficie del liquido senza rimanere tantosto in esso sciolti e confusi, ove non si suppongano attorniati da un sottilissimo invoglio di aria per mo di esempio che da essi nello scendere strascinata con seco vieti loro di giugnere a immediato contatto col liquido. Introducendo questa ipotesi riguardo ai globicini massicci, chi vieta il trasportarla ai globetti foggiati in forma di vescichette? trasportandola s' intende subito come essi rimangansi tondeggianti e mobilissimi, e anzi come possano staccarsi di nuovo dal liquido, e metter l' ale e sparire; il qual ultimo fenomeno saprei volontieri come si spieghi supponendoli massicci. Qualche sorpresa muove in me pure il vedere ch' ei non tien conto veruno dell'opacità, e del colore biancastro avvertito da Saussure in que'globicini, quale appunto debbe in essi vedersi, ove abbian la forma di vescichette, non già supponendoli massicci, nel qual caso sarebbero trasparenti.

Confesso parimente che qualche sorpresa ha in me desta il tratto seguente, cui giova ricopiare ne'suoi termini precisi. = Finalmente le iridi osservate da Saussure col microscopio in questi globi non ponno recarsi in prova della lor cavità; giacchè l' Arcobaleno che presentan le goccie della pioggia illuminata dal sole non avrebbe luogo, com' è noto, se queste goccie fossero cave ossia vescicolari = e prima osservo che non incontro presso Saussure il più lieve cenno da cui pos-

sa inferirsi ch'egli nelle osservazioni qui mentovate abbia impiegato il microscopio. Se ne servì, e lo munì del micrometro quando trattossi di misurare la mole delle pallottoline vaporose. Fuori di questo caso parla bene qualche volta della lente, del microscopio non mai. Poi tengo qualche dubbio che a un uopo tale il microscopio riuscisse opportuno; nel qual dubbio non credo necessario di arrestarmi, parendomi manifesto abbastanza che meglio che coll' assistenza del microscopio possa l' occhio nudo abbracciare congiuntamente, come è pur d' uopo una moltitudine grande di globicini folti pur quanto richiedesi, onde possano i raggi risvegliar nell' occhio la contemporanea apparenza di quelle frangie variocolorate, parallele, conformi si veramente a quelle dell'immagine prismatica, ma di un' origine, si noti bene, diversa assai da quella di queste ultime, quali furon vedute da Kranzestein, e Saussure. Per ultimo confesso di non vedere in che consista l' obbiezione tratta dal comune Arco-baleno, di cui non ha dubbio che non nasca in grembo alle nuvole che attualmente sciolgonsi in pioggia per luce refratta e ripercossa da vere gocciole. Mi duole di dover avvertire che in questa opposizione vengono forse sbagliati per identici fenomeni notabilmente diversi. O io molto m' inganno, o hanno qui luogo le riflessioni per le quali il nostro chiarissimo Venturi nelle sue esimie ricerche fisiche sopra i colori convinse di errore il francese Dutour che s' ingegnò di ridurre al fenomeno della rifrazione prismatica gli anelli colorati, de' quali si adornano le bolle di un' acqua saponata e schiumosa, e le sottilissime lamine di aria comprese fra

due vetri stretti insieme l'un piano, l'altro lievemente convesso, con tanta sagacità contemplate dal Neuton. Oh sento che qui mi si replica: qualunque interpretazione diasi alla comparsa di più colori in un aggregato di globicini vaporosi, come è a buon conto che niun' iride nella nebbia mai non si vede? Potrei ritorcere l'argomento e chiedere come accada, che concependo massicci i globicini della nebbia, giacchè questi non tanto di rado adeguano nella mole le goccioline, come accade dico che l'arco-baleno non ci si offra mai nella nebbia? ma mi restringo piuttosto ad osservare che nell'esperienze di Kranzestein e Saussure non comparvero i colori che per un concorso di circostanze; di camera oscura; di aria costipata dianzi entro un globo, poi messa in libertà; di luce introdotta ad investirla e attraversarla. Malgrado ciò la comparsa fu passeggiera; non durò che due, o tre secondi: qual meraviglia che la nebbia non la presenti? *(a)*

Del resto prego il sig. Monge a permettermi di svelare uno de' motivi, pe' quali reco all' esistenza

---

(a) Al chiarissimo sig. Cavalier Canterzani occorse un giorno di vedere una nuvola adorna di frangie variopinte, parallele, succedentisi in un ordine conforme a quello de' colori dell' arcobaleno. Ei meco punto non dubita che l'origine non ne fosse tutt'altra da quella di quest'ultimo. Non è improbabile che in quell' incontro più ordini e strati di bollicine vaporose tinte ognuna de' suoi colori senza ciò invisibili, si trovassero per una fortuita e in tutto insolita combinazione posti in circostanze, onde assistersi scambievolmente, e i raggi col riunirsi e rafforzarsi produrre quell' apparenza. Essa forse consente col fenomeno narratoci da Kranzestein, e Saussure. Dico forse, perchè può essere che alla produzione di alcune meteore luminose concorra la diffrazione, e meglio anche che non questa la riflessione, di cui dopo le belle sperienze di Brougham e di Venturi sappiamo che in più casi basta a separare la luce ne' suoi colori.

del vapore vescicolare qualche interesse. Nelle idee su la meteorologia del celebre sig. de Luc incontro alcune congetture su la formazione del vapore vescicolare, colle quali, se l'amor proprio non mi fa velo al giudizio, consentono quelle che già tempo, vale a dire ha omai ventidue anni, consegnai a uno scritto da me letto in una privata società letteraria, accolta in Modena a quell' epoca nella propria abitazione da uno splendido Patrocinatore de' belli ed utili studi, verso cui mi restringo a far eco al tributo di encomii datigli dal Chiaris. Venturi, del quale quivi io avea pur l'onore d'esser collega (*a*). Dunque presso il sig. de Luc alla pagina 103 del tomo 2° dell'opera citata leggesi come segue = Sarebbe egli assurdo il pensare che le molecole acquee d' un certo picciolo spazio si riuniscano nella forma di vote sfericine, costrette ad assumere una forma tale dai vapori elastici che continuano a sussister fra esse, e da una certa quantità di fuoco che rimane imprigionato nel loro invoglio? = Non molto oltre cioè alla pag. 111 ricalcando la stessa idea ei dice: = se l'acqua de' vapori, che distruggonsi, potesse raccogliersi in picciole masse, non ha dubbio che a motivo della tendenza reciproca delle sue particelle a riunirsi, queste masse non prendesser la forma di globicini massicci. Ma poichè questa stessa tendenza le stacca dal fuoco per tutto dove i vapori abbondan di troppo per qual motivo non si riunirebbero elle nella forma di voti palloncini attorno a picciole raccolte del vapor superstite e del fuoco che si oppone alla loro

(*a*) V. Indagine fisica su i colori. *Modena 1801. pag. 105.*

riunione in masse? Non vedo qual cosa potesse impedirlo; e tanto più sono disposto ad ammettere questo meccanismo che l' esistenza de' palloncini come componenti le nuvole non mi sembra punto dubbiosa =. Or io nello scritto mentovato dopo di aver avventurate alcune congetture mi esprimo così: = Potrà forse anzi, se pur è lecito d' innestar le congetture le une su le altre, col soccorso di sì fatta parziale, e successiva conversione del vapore in fluido, e del contemporaneo svolgimento del calore che svincolandosi dalla porzione divenuta fluida rivolgesi a mantener nell' altra la forma di vapore, potrà, dico, forse rendersi qualche ragione della produzione di quel particolare aggregato di bollicine non raro ad osservarsi nell' atmosfera e detto al presente dai fisici vapore vescicolare. Quando l' aria è tranquilla e permette non meno alla forza attraente, per cui nell' atto che formansi, tendono ad accostarsi e riunirsi i rudimenti fluidi, che all' espandente del vapore superstite che gli rigetta, di produrre gli effetti lor respettivi con più squisita regolarità, pare che tra le tante combinazioni ammesse dalle circostanze possa aver luogo quella, per cui i rudimenti stessi nel riunirsi formino attorno a picciole porzioni di aria rara e vaporosa una specie di sottilissimo invoglio acqueo, che le trasformi in tante bollicine, o vescichette, le quali comecchè cinte di un velo specificamente più grave dell' ambiente, pur contenendo un' aria renduta, come si è avvertito, dalla forza espansile del vapore più rara che non sarebbe senza questa meschianza, potranno sostenersi nell' atmosfera, o almeno nell' abbassarsi incontreranno strati più densi in cui arrestar-

si e galleggiare a guisa di minutissimi aerostati. =

Ma di quest' appendice temo che dirassi che la giunta supera omai la derrata. E pure debbo intertenermi anche un momento co' dottissimi compilatori della Biblioteca Britannica, e tra essi probabilmente, se non erro, col chiarissimo sig. Pictet. Nel tomo decimo (scienze ed arti) di questa eccellente opera periodica leggonsi alcune considerazioni su i fluidi elastici, ec. premesse alla descrizione, che vien dopo delle macchine a vapore. Partono esse palesemente da mano maestra, e la dottrina nelle stesse epilogata colla massima precisione e nettezza riceve ulteriori rischiaramenti dal ragguaglio di certe esperienze istituite con un apparato opportuno a manifestare la formazione de' vapori nel voto, afferrata per così dire nella prima sua origine, onde compier la serie di quelle, di cui siamo tenuti all'industria di Bettancourt, e di Dalton. In un' annotazione posta a piè di pagina recasi un fatto, del quale ritiensi che servir possa a mostrare, qualmente costipando l' aria con forza se ne alza la temperatura, diradandola si abbassa. Ci si narra che quando il sig. Paul esimio fabbricatore di strumenti fisici, terminata l' operazione di porre in bottiglie una botte delle sue acque impregnate di gaz e sottoposte, onde meglio se ne carichino e saziino ad una veemente pressione, apre la chiave d' uscita e permette alll' acqua rimasta nel fondo di sgorgarne con impeto spinta dall'aria che la comprime, questa nel riprendere il suo volume, ruba all'acqua che passa congiuntamente con efficacia tale il calore che non di rado formansi nella chiave, anche nella state veri ghiacciuoli. Sul fatto non cade dubbio veru-

no; affinchè anche la conseguenza ne fosse in tutto immune converrebbe escludere ogni sospetto che al raffreddamento concorra per avventura la conversione, che attese le circostanze sembra inevitabile quasi, in vapor elastico di porzion dell'umido strascinato con seco dall'aria. E senza entrare nell'analisi di un fenomeno troppo complicato per soffrirla esatta e compiuta, pongasi mente ai gaz, de' quali è carica quanto è possibile l'acqua, e che tentano di sprigionarsene, intanto che a ritenerveli è forza chiuderla sotto l' attual compressione in bottiglie, e affrettarsi a turarle e suggellarle. Parmi assai naturale che al diradarsi e uscir rapido dell' aria debba porzione di questi gaz svincolarsi, e poichè sortendo essi dal seno dell' acqua non ponno non essere carichi di umido, possa, e debba pur questo assumere in parte la forma di vapor elastico che depredando il necessario calore, o calorico che voglia dirsi all' acqua circostante fa sorgere in questa quel notabile raffreddamento, di cui il fatto c'informa. Quí, se non erro, hanno luogo inversamente i dubbj nella memoria sul suono mossi al chiarissimo sig. Biot. Mi duole che al celebre Saussure nell' imitar l'esperienze sopra narrate di Kranzestein non sovvenisse di chiudere in quel suo pallone di vetro un picciol Termometro. Forse in questo qualche indizio di abbassamento si sarebbe veduto quando all' uscir dell' aria dianzi compressa fece subita mostra di se il vapore vescicolare. Del resto dopo le proteste ripetutamente fatte non tengo bisogno di avvertire che sono questi semplici dubbj e mere interrogazioni indirizzate a un Fisico di primo ordine, e benemerito quanto niun altro della teoria del calore.

INDICE

Prefazione Pag. III
Estratti contenenti Osservazioni di Medicina pratica di Luigi Laghi XXIII

Elementi di trigonometria sferoidica. Parte seconda. *Di Barnaba Oriani* 1
Sul conduttore tagliente d'Hawkins per l'estrazione della pietra dalla vescica. *Di Antonio Scarpa* 59
Sulle livellazioni barometriche. Parte seconda. *Di Francesco Venini* 81
Nuova soluzione di un problema di meccanica dell'Eulero. *Di Girolamo Saladini* 171
Nuove ricerche dirette a rettificare la teoria della resistenza de' fluidi, e le sue applicazioni. Memoria seconda. *Di Giuseppe Avanzini* 185
Descrizione di uno strumento acustico. *Di Gaetano Uttini* 227
Osservazioni e sperienze sopra la teoria della resistenza de' fluidi di Giorgio Juan. *Di Giuseppe Avanzini* 241
Osservazioni storiche sopra l'aritmetica di Francesco Maurolico. *Di Mariano Fontana* 275
Sull'apparecchio laterale colla descrizione di nuovi strumenti onde rendere più sicura la litotomia. *Di Giuseppe Atti* 297
Esame di un articolo della teoria del suono. *Di Michele Araldi* 311
Considerazioni e dubbii sulla compressibilità ed elasticità de' liquidi ed in ispecie dell'acqua. *Del medesimo* 327
Del parto pel braccio. *Di Gio: Batista Palletta* 361
Della vescichetta ombelicale. *Del medesimo* 373
Aggiunta alla parte II^a^ della memoria sulle livellazioni barometriche *Di Francesco Venini* 391
Sul principio delle velocità virtuali. *Di Girolamo Saladini* 399
Su un dente e parte di mandibola d'un mastodonte trovati presso la Rocchetta nel dipartimento del Tanaro. Lettera. *Di Carlo Amoretti* 421
Appendice alle memorie poste alle pagine 311 e 327. *Di Michele Araldi* 431